

ISSN 0130-2221

2023 · № 2

ФЕВРАЛЬ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# БУТЫЛОЧНОЕ ГОРЛЫШКО



В этой изящной головоломке вам нужно расположить пять деталей внутри прямоугольной рамки  $7 \times 4$ . Детали – это обычные для головоломок такого рода тетрамино и пентамино.

В чем же сложность? Во-первых, помещать детали внутрь можно только через отверстие шириной 2, расположенном в середине одной из коротких сторон рамки. Во-вторых, как видно на фотографии, рамка закрыта сверху прозрачной крышкой, из-за которой детали внутри рамки можно лишь двигать, но нельзя приподнимать и, например, переворачивать.

Подобный принцип – использовать ограничения в движении – свойственен многим головоломкам сингапурского изобретателя Гоха Пита Хиама (Goh Pit Khiam). Но чтобы изготовить «Бутылочное горлышко» в домашних условиях, не обязательно воспроизводить весь внешний вид этой головоломки: достаточно вырезать детали из картона и нарисовать рамку на бумаге – помните лишь, что внутри рамки детали нельзя поднимать над поверхностью.

Желаем успеха!

## В номере:

## УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук

Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАНФизический институт  
им. П.Н.Лебедева РАНМосковский  
физико-технический институт  
Московский центр непрерывного  
математического образования

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, А.А.Варламов,  
С.Д.Варламов, А.П.Веселов,  
А.Н.Виленин, Н.П.Долбилин,  
С.А.Дориченко, В.Н.Дубровский,  
А.А.Заславский, А.Я.Канель-Белов,  
П.А.Кожевников, С.П.Коновалов,  
К.П.Кохась, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
А.Б.Минеев, В.Ю.Протасов,  
А.М.Райгородский, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Сташенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов (заместитель главного  
редактора), А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, В.И.Берник,  
А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

1970 ГОДА

## ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА**А.Н.Колмогоров****Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Фризы. *А.Панов, Д.Панов, П.Панов*  
12 Космические тросовые системы. *М.Никитин,  
А.Тепляков*

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 20 Из истории раннего развития физики.  
*С.Иншаков*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 23 Задачи M2734–M2737, Ф2741–Ф2744  
24 Решения задач M2722–M2725, Ф2729–Ф2732

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 29 Задачи 21–24

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 30 Задачи

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 31 Проводящий шар в однородном поле.  
*А.Черноуцан*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Физика + экология

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 39 Повороты и круговые интерпретации.  
*Е.Бакаев, П.Кожевников*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 45 Кривая через точки. *Л.Ашкинази*

## ОЛИМПИАДЫ

- 50 Муниципальный этап LVII Всероссийской  
олимпиады школьников по физике

- 55 Ответы, указания, решения  
Вниманию наших читателей (11, 22)

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье «Фризы»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогулки с физикой*

# Фризы

А. ПАНОВ, Д. ПАНОВ, П. ПАНОВ

**Ф**РИЗ – ЭТО ПЕРИОДИЧЕСКИЙ рисунок на плоскости, заполняющий полосу между двумя параллельными прямыми. На рисунке 1 представлен фрагмент фриза, на самом деле простирающе-



Рис. 1. Греческий фриз

гося вправо и влево до бесконечности. Снизу дорисован вектор минимальной длины, при сдвиге на который фриз совмещается сам с собой. В зависимости от обстоятельств, мы будем называть периодом фриза либо сам этот вектор  $\vec{\tau}$ , либо его длину – положительное число  $\tau = |\vec{\tau}|$ .

В 1856 году английский архитектор и дизайнер Оуэн Джонс (1809–1874) опубликовал свою знаменитую «Граматику орнамента» [1]. Это одновременно и энциклопедия, и справочник, и учебник для студентов-дизайнеров, содержащий тысячи образцов фризов и других орнаментов. В отдельных главах «Граматики» представлены фризы разных эпох и разных народов. Так что это еще и своеобразная историческая и географическая классификация фризов.

У математиков существует своя собственная классификация, основанная на анализе симметрий фризов. Она позволяет разделить все фризы на семь различных типов.

Вся наша статья разбита на несколько частей. Сначала мы поговорим о движениях плоскости и симметриях геометрических объектов, расположенных на ней.

Потом речь пойдет о симметриях плоской полосы, являющейся носителем фриза, и мы составим таблицу умножения ее симметрий. Далее следует основной раздел статьи, который как раз и содержит классификацию фризов. А под конец мы еще поговорим о фризах и вазах и добавим кое-что о строении химических молекул. Но начнем с еще одного примера фриза.

## Фриз-синусоида

На самом деле фризы в больших количествах встречаются в каждом учебнике математики – это графики *периодических*, в том числе тригонометрических функций. Напомним, что функция  $f(x)$  называется периодической, если существует такое минимальное положительное число  $\tau$ , что для каждого  $x$  выполняется равенство  $f(x + \tau) = f(x)$ . Число  $\tau$  называется периодом функции  $f$ . При этом график периодической функции  $f$  совмещается сам с собой при сдвиге на горизонтальный вектор  $\vec{\tau} = (\tau, 0)$ .

Возьмем, к примеру, функцию  $y = \sin x$ . Она периодическая с периодом  $\tau = 2\pi$ , ее график – синусоида, совмещающаяся с собой при сдвиге на горизонтальный вектор  $\vec{\tau} = (2\pi, 0)$ . Чтобы можно было считать такую синусоиду фризом, нужно только указать полосу, которая эту синусоиду содержит. Поскольку наименьшее значение синуса  $-1$ , а наибольшее  $1$ , естественно считать, что такая полоса ограничена прямыми  $y = -1$  и  $y = 1$  (рис. 2). Штриховой

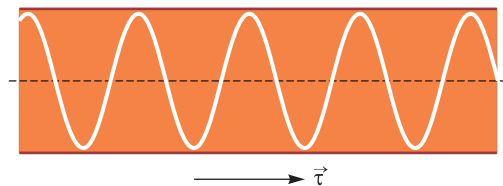


Рис. 2. Фриз-синусоида, его период равен  $2\pi$

линией обозначим *горизонтальную ось* фриза, которая делит полосу пополам.

### Движение плоскости и симметрии

#### Движения

Движение плоскости – это преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

Об одном движении плоскости мы уже упоминали – это *сдвиг* плоскости на некоторый вектор  $\vec{t}$ , при котором каждая точка  $x$  переходит в точку  $x' = x + \vec{t}$ .

Еще одно, хорошо известное, движение плоскости – это *поворот* плоскости вокруг точки  $A$  на угол  $\varphi$ .

И еще одно движение – это *отражение* относительно прямой  $l$ , когда каждая точка  $x$  переходит в точку  $x'$  такую, что  $x$  и  $x'$  лежат по разные стороны от прямой  $l$  на равных расстояниях от нее и на общем перпендикуляре к ней.

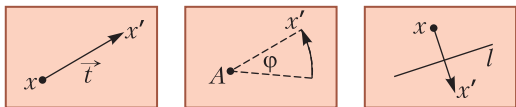


Рис. 3. Сдвиг; поворот; отражение

Эти движения показаны на рисунке 3.

Наконец, добавим сюда *скользящее отражение* относительно прямой, которое получается в результате отражения относительно прямой  $l$  и последующего сдвига на параллельный ей вектор  $\vec{t}$  (рис. 4).

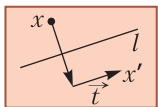


Рис. 4. Скользящее отражение

Теорема Шаля утверждает, что других движений плоскости нет.

#### Симметрии

*Симметрия* объекта, расположенного на плоскости, – это движение плоскости, при котором объект совмещается сам с собой. Объектом, о котором идет речь в этом определении, может служить любое подмножество плоскости, например, линия, круг или конечный набор точек. Точно так же можно говорить о симметрии любой плоской картинке, в том числе о симметрии фриза.

**Упражнение 1.** Перечислите все симметрии круга с центром в точке  $A$ .

Для начала мы поможем вам с этим первым упражнением.

У круга имеется очень много симметрий, т.е. существует много движений плоскости, которые переводят круг в себя. Во-первых, это все повороты плоскости вокруг центра круга, точки  $A$ . Во-вторых, это все отражения относительно прямых, проходящих через центр круга. Других симметрий у круга нет.

А вот еще два упражнения, уже для самостоятельного решения.

#### Упражнения

2. Перечислите все симметрии равнобедренного треугольника.
3. Перечислите все симметрии равностороннего треугольника.

#### Умножение движений и умножение симметрий

Движения плоскости можно перемножать, и их произведение тоже будет движением плоскости. Пусть, например,  $R$  – это поворот плоскости на угол  $\varphi$  вокруг точки  $A$ , а  $T$  – сдвиг плоскости на вектор  $\vec{t}$ . Тогда их произведение  $R \circ T$  – это движение, получающееся в результате последовательного применения к плоскости сначала сдвига  $T$ , а потом поворота  $R$ .

Вообще, если имеются два движения плоскости  $P$  и  $Q$ , то их произведение  $P \circ Q$  – это движение, получающееся в результате последовательного применения к плоскости сначала движения  $Q$ , а потом движения  $P$ . Именно в таком порядке!

Если два движения плоскости  $P$  и  $Q$  будут симметриями одного и того же геометрического объекта, то их произведение  $P \circ Q$  тоже будет движением и тоже будет переводить этот объект в себя и, значит, тоже будет его симметрией.

Вот два простых упражнения на эту тему.

#### Упражнения

4. Пусть движение  $T_1$  – это сдвиг плоскости на вектор  $\vec{t}_1$ , а  $T_2$  – сдвиг плоскости на вектор  $\vec{t}_2$ . Какое движение плоскости представляет их произведение  $T_1 \circ T_2$ ?
5. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  – это две симметрии круга, являющиеся поворотами на углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  вокруг его центра. Какую симметрию круга представляет собой их произведение  $R_1 \circ R_2$ ?

Сейчас мы обсудим более сложную задачу, а именно, поговорим о симметриях полосы и об их произведениях.

## Симметрии полосы и таблица умножения

### Симметрии полосы

Бесконечная полоса, заключенная между двумя параллельными прямыми, называется *носителем фриза* – фриз расположен внутри нее и целиком заполняет ее (см. рис. 1,2). Любая симметрия фриза одновременно будет и симметрией содержащей его полосы. Так что сначала стоит отдельно разобраться именно с симметриями полосы.

Полосу мы всегда будем располагать горизонтально (рис. 5). Все симметрии полосы нетрудно перечислить – это

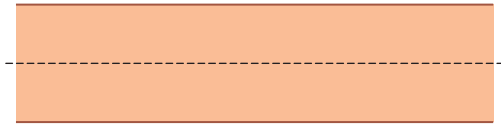


Рис. 5. Полоса со своей горизонтальной осью

- сдвиги в горизонтальном направлении;
- повороты на  $180^\circ$  вокруг точек, лежащих на горизонтальной оси;
- отражения относительно вертикальных прямых;
- скользящие отражения относительно горизонтальной оси.

Еще раз подчеркнем, что любая симметрия фриза переводит содержащую его полосу в себя и поэтому обязательно входит в этот список движений.

Введем теперь подходящие обозначения для этих симметрий полосы.

### Обозначения для симметрий полосы

Итак, обозначим

- $T_{\vec{t}}$  – сдвиг на вектор  $\vec{t}$ , параллельный горизонтальной оси;
- $R_A$  – поворот на угол  $180^\circ$  вокруг точки  $A$ , лежащей на горизонтальной оси;
- $V_A$  – вертикальное отражение, отражение относительно вертикальной прямой, проходящей через точку  $A$ , лежащую на горизонтальной оси;
- $S_{\vec{t}}$  – скользящее отражение, отражение относительно горизонтальной оси с

последующим сдвигом на вектор  $\vec{t}$ , параллельный горизонтальной оси;

•  $S_{\vec{0}}$  – горизонтальное отражение, отражение относительно горизонтальной оси, важный частный случай скользящего отражения.

Введем еще одно дополнительное обозначение, которое мы дальше будем использовать:

•  $S'$  – множество всех скользящих отражений относительно горизонтальной оси, за исключением горизонтального отражения  $S_{\vec{0}}$ .

Добавим еще, что  $T_{\vec{0}}$  – это тождественное отображение плоскости на себя, при котором все точки плоскости остаются на месте.

После введения этих обозначений мы можем сформулировать несколько легких упражнений на умножение симметрий полосы. В них  $\vec{s}$  и  $\vec{t}$  – это два горизонтальных вектора, точка  $A$  лежит на горизонтальной оси полосы.

### Упражнения

6. Взгляните на определение скользящего отражения и убедитесь, что

$$\bullet S_{\vec{t}} = T_{\vec{t}} \circ S_{\vec{0}}.$$

7. Убедитесь также, что

$$\bullet T_{\vec{t}} \circ T_{\vec{s}} = T_{\vec{s}+\vec{t}};$$

$$\bullet R_A \circ R_A = T_{\vec{0}} \quad (\text{это можно записать короче: } R_A^2 = T_{\vec{0}});$$

$$\bullet S_{\vec{t}} \circ S_{\vec{s}} = T_{\vec{s}+\vec{t}};$$

$$\bullet T_{\vec{t}} \circ S_{\vec{s}} = S_{\vec{t}} \circ T_{\vec{s}} = S_{\vec{s}+\vec{t}}.$$

Эти упражнения содержат много разных формул и, чтобы с ними было легче работать, нужно их как-то структурировать. Сейчас мы объединим их в таблицу, а именно, в таблицу умножения.

### Таблица умножения симметрий полосы

Вот как она выглядит (табл.1).

Табл. 1. Таблица умножения симметрий полосы

$\circ$	$T_{\vec{s}}$	$R_B$	$V_B$	$S_{\vec{s}}$
$T_{\vec{t}}$	$T_{\vec{t}+\vec{s}}$	$R_{B+\vec{t}/2}$	$V_{B+\vec{t}/2}$	$S_{\vec{t}+\vec{s}}$
$R_A$	$R_{A-\vec{s}/2}$	$T_{2\vec{BA}}$	$S_{2\vec{BA}}$	$V_{A-\vec{s}/2}$
$V_A$	$V_{A-\vec{s}/2}$	$S_{2\vec{BA}}$	$T_{2\vec{BA}}$	$R_{A-\vec{s}/2}$
$S_{\vec{t}}$	$S_{\vec{t}+\vec{s}}$	$V_{B+\vec{t}/2}$	$R_{B+\vec{t}/2}$	$T_{\vec{t}+\vec{s}}$

Здесь опять принято, что точки  $A$  и  $B$  лежат на горизонтальной оси полосы, а векторы  $\vec{s}$  и  $\vec{t}$  горизонтальны. Поясним, как эта таблица работает. Предположим, что нам нужно вычислить произведение поворота  $R_A$  и вертикального отражения  $V_B$ , т.е. произведение  $R_A \circ V_B$ . Для этого посмотрим, что стоит в ячейке на пересечении строки с названием  $R_A$  со столбцом с заголовком  $V_B$ . Это будет  $S_{2\overline{BA}}$  и это означает, что

$$R_A \circ V_B = S_{2\overline{BA}}.$$

**Упражнение 8.** С помощью таблицы умножения убедитесь, что  $S_{\vec{t}} \circ R_B = V_{B+\vec{t}/2}$ .

Конечно, остается вопрос, как были вычислены все эти 16 произведений, заполняющих таблицу 1. Но легкое упражнение 7 гарантирует нам, что, по крайней мере четыре клетки таблицы  $T_{\vec{t}} \circ T_{\vec{s}}, S_{\vec{t}} \circ S_{\vec{s}}, T_{\vec{t}} \circ S_{\vec{s}}$ , и  $S_{\vec{t}} \circ T_{\vec{s}}$  заполнены правильно. А следующие два упражнения (вместе с указанием к ним) показывают, как можно проверить и все остальное.

**Упражнения**

**9.** Докажите, что  $R_A \circ V_B = S_{2\overline{BA}}$ .

**10.** Докажите, что  $S_{\vec{t}} \circ R_B = V_{B+\vec{t}/2}$ .

*Указание.* Воспользуйтесь рисунком 6. Слева  $V_B(x)$  – это образ точки  $x$  при отражении от вертикальной прямой, проходящей через точку  $B$ ,

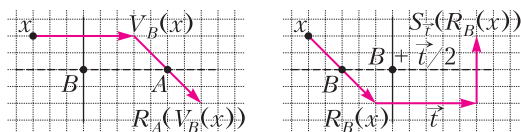


Рис. 6. К упражнениям 9, 10

а  $R_A(V_B(x))$  – это образ точки  $x$  при движении  $R_A \circ V_B$ . Справа  $R_B(x)$  – это образ точки  $x$  при повороте  $R_B$ , а  $S_{\vec{t}}(R_B(x))$  – это образ точки  $x$  при движении  $S_{\vec{t}} \circ R_B$ .

И теперь заключительное упражнение на эту тему.

**Упражнение 11.** Докажите, что все ячейки в таблице 1 заполнены правильно.

**Сжатая таблица умножения симметрий полосы**

Наша предыдущая таблица умножения содержит важную информацию, но выглядит достаточно громоздко. Ее можно слегка сжать, убрав нижние индексы (табл. 2).

Табл. 2. Сжатая таблица умножения

o	T	R	V	S
T	T	R	V	S
R	R	T	S	V
V	V	S	T	R
S	S	V	R	T

И это тоже ценная конструкция. Покажем, как читать эту таблицу умножения. Например, что значит та же самая формула

$$R \circ V = S?$$

Она означает, что какой бы поворот  $R$  и какое бы вертикальное отражение  $V$ , являющиеся симметриями полосы, мы ни взяли, в результате умножения  $R$  на  $V$  получим новую симметрию полосы, и это обязательно будет некоторое скользящее отражение  $S$ .

Теперь, после всей проделанной подготовительной работы, мы готовы перейти к классификации фризов.

**Семь типов фризов**

Мы будем характеризовать фриз набором его симметрий. И чтобы разобраться, что это означает, начнем с фриза-синусоиды (см. рис. 2).

**Симметрии фриза-синусоиды**

Во-первых, у фриза-синусоиды, как и у любого другого фриза, по определению есть горизонтальный сдвиг  $T_{\vec{t}}$  на период, в данном случае на  $\vec{t} = (2\pi, 0)$ , который переводит его в себя, т.е. является его симметрией. На самом деле у фриза имеется бесконечно много сдвигов-симметрий и все они имеют вид  $T_{n\vec{t}}$ , где  $n$  любое целое.

Во-вторых, обратите внимание на какую-либо точку пересечения синусоиды с горизонтальной осью фриза. Если повернуть весь фриз вокруг этой точки на  $180^\circ$ , то он совместится с собой. Так что этот поворот – еще одна симметрия. И таких поворотов симметрий тоже бесконечно много. На рисунке 7 они отмечены синими точками.

В-третьих, проведите вертикальные прямые через точки максимума и минимума синусоиды (см. рис. 7). Отражения фриза относительно этих прямых тоже являются его симметриями.

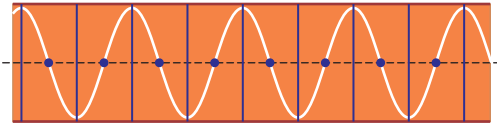


Рис. 7. Отмечены центры поворотов-симметрий и оси вертикальных отражений-симметрий

Наконец, отразите фриз-синусоиду относительно горизонтальной оси, а потом еще дополнительно сдвиньте на полпериода вправо. При таком движении фриз совместится с собой. Это скользящее отражение  $S_{\bar{\tau}/2}$  тоже является симметрией этого фриза, а вместе с ним являются симметриями и все скользящие отражения вида  $S_{(n+1/2)\bar{\tau}}$ , где  $n$  – любое целое. Заметим, что среди этих скользящих отражений отсутствует горизонтальное отражение  $S_{\bar{0}}$ .

Нетрудно убедиться, что мы перечислили все возможные типы симметрии фриз-синусоиды: сдвиги, повороты, скользящие отражения ( $S_{\bar{0}}$  среди них отсутствует), а также вертикальные отражения. Мы будем говорить, что фриз с таким набором симметрий имеет тип

$$\langle T, R, V, S' \rangle.$$

#### Упражнения

12. Убедитесь, что греческий фриз на рисунке 1 имеет симметрию типа  $\langle T, R, V, S' \rangle$ .

13. Убедитесь, что график-фриз функции  $y = \sin 2x$  и график-фриз функции  $y = \sin \frac{x}{2}$  имеют тот же самый тип симметрии, что и график-фриз функции  $y = \sin x$ .

А сейчас мы поэтапно выясним, какие именно симметрии могут быть у фриза с заданным периодом.

#### Сдвиги-симметрии фризов

По определению, данному в самом начале статьи, в состав симметрий любого фриза обязательно входит сдвиг  $T_{\bar{\tau}}$ , где вектор  $\bar{\tau}$  – это период фриза, т.е. горизонтальный вектор минимальной длины, при сдвиге на который фриз совмещается сам с собой. Понятно, что и любой сдвиг вида  $T_{n\bar{\tau}}$  на вектор  $n\bar{\tau}$ , являющийся целым кратным периода, тоже будет симметрией этого фриза. Теперь объясним, почему других сдвигов-симметрий у фриза нет.

Предположим, что некоторый сдвиг  $T_{\bar{t}}$  входит в состав симметрий фриза. Тогда в состав симметрий входит и любой сдвиг вида  $T_{n\bar{\tau}} \circ T_{\bar{t}}$ . Таблица 1 позволяет вычислить это произведение:

$$T_{n\bar{\tau}} \circ T_{\bar{t}} = T_{\bar{t} + n\bar{\tau}}.$$

Если горизонтальный вектор  $\bar{t}$  не кратен периоду  $\bar{\tau}$ , то среди векторов  $\bar{t} + n\bar{\tau}$ , где  $n$  – любое целое, положительное или отрицательное, обязательно найдется такой ненулевой вектор, что  $|\bar{t} + n\bar{\tau}| < |\bar{\tau}|$ . А это уже противоречит свойству минимальности длины периода  $\bar{\tau}$ . Поэтому вектор  $\bar{t}$  обязательно кратен периоду  $\bar{\tau}$ . Тем самым, обязательно существует такое целое  $n$ , что  $\bar{t} = n\bar{\tau}$ .

Итак, все сдвиги-симметрии фриза с периодом  $\bar{\tau}$  имеют вид  $T_{n\bar{\tau}}$ , где  $n$  – целое. Других сдвигов-симметрий у фриза нет.

#### Повороты-симметрии фризов

Пусть у фриза с периодом  $\bar{\tau}$  имеется хотя бы один поворот-симметрия. Обозначим центр этого поворота на  $180^\circ$ , лежащий на горизонтальной оси фриза, буквой  $O$ . Тогда сам поворот запишется как  $R_O$ . Вместе с  $R_O$  симметрией фриза будет и любое произведение вида  $T_{n\bar{\tau}} \circ R_O$ . Из таблицы 1 извлекаем, что

$$T_{n\bar{\tau}} \circ R_O = R_{O+n\bar{\tau}/2}.$$

Таким образом, вместе с поворотом  $R_O$  мы получаем целую серию поворотов-симметрий  $R_{O+n\bar{\tau}/2}$ . Посмотрим, почему других поворотов-симметрий у фриза нет.

Пусть у фриза имеется поворот-симметрия вида  $R_{O+\bar{t}}$ . Тогда у него есть симметрия  $R_{O+\bar{t}} \circ R_O$ . Таблица 1 дает нам, что это сдвиг на вектор  $2\bar{t}$ :

$$R_{O+\bar{t}} \circ R_O = T_{2\bar{t}}.$$

Из предыдущего пункта мы знаем, что этот вектор  $2\bar{t}$  обязательно кратен периоду  $\bar{\tau}$ , т.е.  $2\bar{t} = n\bar{\tau}$  и  $\bar{t} = n\bar{\tau}/2$ .

Итак, фриз с периодом  $\bar{\tau}$  может иметь повороты-симметрии вида  $R_{O+n\bar{\tau}/2}$ , где  $n$  – целое, а  $O$  – это какая-то точка на горизонтальной оси фриза. Других поворотов-симметрий у фриза быть не может.



**Вертикальные отражения-симметрии фриз**

Рассмотрим фриз, в состав симметрий которого, кроме сдвигов  $T_{n\vec{\tau}}$ , входят вертикальные отражения. И пусть  $V_A$  – одно из них. Обращаясь к таблице 1, находим, что

$$T_{n\vec{\tau}} \circ V_A = V_{A+n\vec{\tau}/2}$$

и что для любого горизонтального вектора  $\vec{t}$

$$V_{A+\vec{t}} \circ V_A = T_{2\vec{t}}.$$

Но это фактически те же самые два соотношения, которые мы использовали в предыдущем разделе. Только буква  $R$  в них заменена на букву  $V$ . Так что мы можем один к одному переписать предыдущий раздел, сделав эту замену и еще заменив всюду слово «поворот» на словосочетание «вертикальное отражение». В конце концов мы получим следующее верное утверждение.

Фриз с периодом  $\vec{\tau}$  может иметь вертикальные отражения-симметрии вида  $V_{A+n\vec{\tau}/2}$ , где  $n$  – целое, а точка  $A$  – это какая-либо точка на горизонтальной оси фриза. Других вертикальных отражений-симметрий у фриза быть не может.

**Скользящие отражения-симметрии фриз**

На этот раз обсудим фриз, в состав симметрий которых входят скользящие отражения. Пусть  $S_{\vec{t}}$  – одно из них. Вместе с ним симметриями фриза будут и все скользящие отражения вида

$$S_{\vec{t}+n\vec{\tau}} = T_{n\vec{\tau}} \circ S_{\vec{t}}.$$

Среди всех горизонтальных векторов  $\vec{t} + n\vec{\tau}$  выберем вектор  $\vec{t}'$  с минимальной длиной. Тогда обязательно

$$0 \leq |\vec{t}'| < |\vec{\tau}|.$$

С другой стороны,

$$S_{\vec{t}'} \circ S_{\vec{t}'} = T_{2\vec{t}'}$$

Поэтому  $T_{2\vec{t}'}$  – это тоже симметрия фриза, откуда следует, что вектор  $2\vec{t}'$  кратен вектору периода  $\vec{\tau}$ . Вместе с неравенством  $0 \leq |\vec{t}'| < |\vec{\tau}|$  это говорит о том, что либо  $\vec{t}' = \vec{0}$ , либо  $\vec{t}'$  с точностью до знака совпадает с  $\vec{\tau}/2$ .

В первом случае, когда  $\vec{t}' = \vec{0}$ , отражение  $S_{\vec{0}}$  будет симметрией фриза, и все скользящие отражения-симметрии фриза будут иметь вид  $S_{n\vec{\tau}}$ .

Во втором случае, когда  $|\vec{t}'| = 2|\vec{\tau}|$ , скользящее отражение  $S_{\vec{\tau}/2}$  будет симметрией фриза, и все скользящие отражения-симметрии будут иметь вид  $S_{(n+1/2)\vec{\tau}}$  и не будут включать  $S_{\vec{0}}$ .

После этого слегка затянувшегося введения мы можем приступить к перечислению типов фриз.

**Первые пять типов фриз**

Всюду дальше вектор  $\vec{\tau}$  – это период фриза.

1) Пусть в состав симметрий фриза входят только сдвиги. Мы уже знаем, что все такие сдвиги обязаны иметь вид  $T_{n\vec{\tau}}$ . Два примера подобных фриз можно видеть на рисунке 8. Мы говорим, что все такие фриз имеют тип  $\langle T \rangle$ .

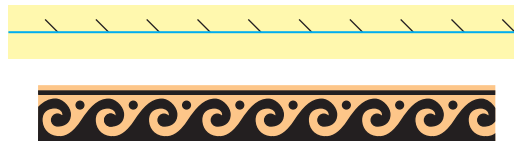


Рис. 8. Фриз типа  $\langle T \rangle$

2) Пусть в состав симметрий фриза входят только сдвиги и повороты, тогда, как мы знаем, все эти повороты имеют вид  $R_{O+n\vec{\tau}/2}$ , где  $O$  – это некоторая точка на горизонтальной оси фриза. Два примера таких фриз представлены на рисунке 9.

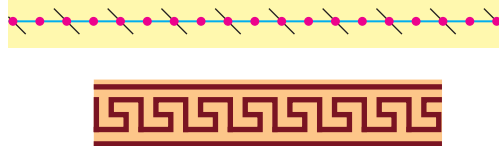


Рис. 9. Фриз типа  $\langle T, R \rangle$

Все симметрии этих фриз – это сдвиги вида  $T_{n\vec{\tau}}$  и повороты  $R_{O+n\vec{\tau}/2}$ . Мы говорим, что такие фриз имеют тип  $\langle T, R \rangle$ .

3) Пусть в состав симметрий фриза входят только сдвиги и вертикальные отражения. Мы знаем, что в этом случае все эти вертикальные отражения имеют вид  $V_{A+n\vec{\tau}/2}$ ,

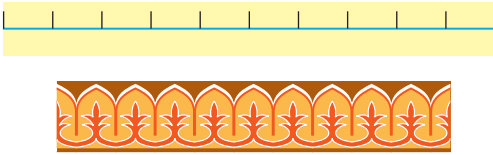


Рис. 10. Фризы типа  $\langle T, V \rangle$

где  $A$  – это некоторая точка на горизонтальной оси фриза. Два таких фриза приведены на рисунке 10. Все их симметрии – это сдвиги  $T_{n\bar{\tau}}$  и вертикальные отражения  $V_{A+n\bar{\tau}/2}$ . Мы говорим, что эти фризы имеют тип  $\langle T, V \rangle$ .

4) Рассмотрим теперь случай, когда в состав симметрий фриза входят только сдвиги и скользящие отражения, среди которых присутствует и отражение  $S_{\bar{0}}$ . Раньше мы уже выяснили, что в этом случае все скользящие отражения-симметрии фриза – это  $S_{n\bar{\tau}}$ . Два примера фризов такого рода можно видеть на рисунке 11.

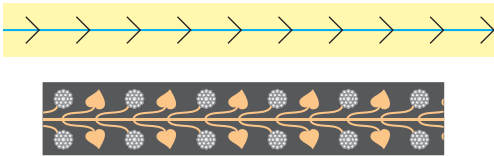


Рис. 11. Фризы типа  $\langle T, S_{\bar{0}} \rangle$

Перечислим все симметрии этих фризов. Это сдвиги  $T_{n\bar{\tau}}$  и скользящие отражения  $S_{n\bar{\tau}}$ . Тип симметрии таких фризов мы обозначим  $\langle T, S_{\bar{0}} \rangle$ .

5) Наконец, посмотрим, что происходит, когда опять в состав симметрий фриза входят только сдвиги и скользящие отражения, но при этом отражение  $S_{\bar{0}}$  отсутствует. На этот раз, как мы выяснили раньше, все возможные скользящие отражения-симметрии фриза – это  $S_{(n+1/2)\bar{\tau}}$ . И такие фризы существуют – два примера представлены на рисунке 12. Все симметрии этих фризов – это сдвиги  $T_{n\bar{\tau}}$  и сколь-

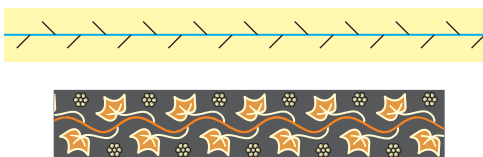


Рис. 12. Фризы типа  $\langle T, S' \rangle$

зящие отражения  $S_{(n+1/2)\bar{\tau}}$ . Тип таких фризов мы обозначим  $\langle T, S' \rangle$ .

**Еще два типа фризов**

Из сжатой таблицы умножения симметрий (см. табл. 2) можно извлечь следующие три формулы:

$$R \circ S = V, S \circ V = R, V \circ R = S.$$

Наличие этих формул позволяет сделать следующий вывод. Если у фриза в качестве симметрий присутствует какая-то пара движений из тройки вида  $R, S, V$ , то у него в качестве симметрий присутствуют все три типа движений из этой тройки. Так что нам осталось рассмотреть только следующие две ситуации.

6) Рассмотрим случай, когда в состав симметрий фриза с периодом  $\bar{\tau}$ , кроме сдвигов, входит некоторый поворот  $R_O$  и отражение относительно горизонтальной оси  $S_{\bar{0}}$  и, следовательно, также некоторое вертикальное отражение. Мы уже знаем, что в этом случае все сдвиги имеют вид  $T_{n\bar{\tau}}$ , все повороты –  $R_{O+n\bar{\tau}/2}$ , скользящие отражения –  $S_{n\bar{\tau}}$ . Что касается вертикальных отражений, то из таблицы 1 извлекаем следующую формулу:

$$R_{O+k\bar{\tau}/2} \circ S_{l\bar{\tau}} = V_{O+(k-l)\bar{\tau}/2},$$

т.е. оси вертикального отражения проходят через те же самые центры вращений.

Итак, в рассматриваемом случае все симметрии фриза – это сдвиги  $T_{n\bar{\tau}}$ , повороты  $R_{O+n\bar{\tau}/2}$ , скользящие отражения  $S_{n\bar{\tau}}$  и вертикальные отражения вида  $V_{O+n\bar{\tau}/2}$ . При этом вертикальные оси отражения проходят через центры вращения. Два примера таких фризов можно видеть на рисунке 13. Тип таких фризов обозначим  $\langle T, R, V, S_{\bar{0}} \rangle$ .

7) Наконец, посмотрим, что происходит, когда в состав симметрий фриза с периодом  $\bar{\tau}$ , кроме сдвигов, входит некоторый

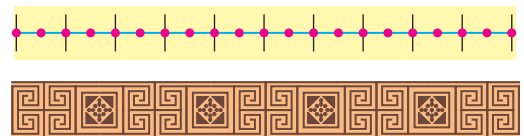


Рис. 13. Фризы типа  $\langle T, R, V, S_{\bar{0}} \rangle$

поворот  $R_O$ , некоторое скользящее отражение, при этом отражение  $S_0$  отсутствует, и опять автоматически присутствует некоторое вертикальное отражение. Мы уже знаем, что в этом случае все сдвиги имеют вид  $T_{n\bar{\tau}}$ , все повороты –  $R_{O+n\bar{\tau}/2}$ , а скользящие отражения –  $S_{(n+1/2)\bar{\tau}/2}$ . Что касается вертикальных отражений, то с помощью таблицы 1 на этот раз получаем следующий результат:

$$R_{O+k\bar{\tau}/2} \circ S_{(l+1/2)\bar{\tau}/2} = V_{(O+\bar{\tau}/4)+(k-l)\bar{\tau}/2}.$$

Итак, в рассматриваемом случае все симметрии фриза – это сдвиги  $T_{n\bar{\tau}}$ , повороты  $R_{O+n\bar{\tau}/2}$ , скользящие отражения  $S_{(l+1/2)\bar{\tau}/2}$  и вертикальные отражения вида  $V_{(O+\bar{\tau}/4)+n\bar{\tau}/2}$ . При этом центры поворотов и вертикальные оси отражения чередуются и отстоят друг от друга на четверть периода, т.е. на

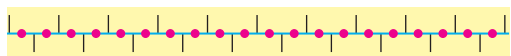


Рис. 14. Фризы типа  $\langle T, R, V, S' \rangle$

расстояние  $\tau/4$ . Очередные два примера таких фризов представлены на рисунке 14. Тип симметрии в этом случае обозначим  $\langle T, R, V, S' \rangle$ .

Нижний фриз, конечно, сильно напоминает фриз-синусоиду (см.рис. 2). К тому же самому типу симметрии относится и греческий фриз, показанный на рисунке 1.

Таким образом, классификация фризов завершена – мы описали все семь типов их симметрий. И теперь предлагаем большое упражнение на эту тему.

**Упражнение 14.** Постарайтесь определить, к какому именно типу симметрии,  $\langle T \rangle$ ,  $\langle T, R \rangle$ ,  $\langle T, V \rangle$ ,  $\langle T, S_0 \rangle$ ,  $\langle T, S' \rangle$ ,  $\langle T, R, V, S_0 \rangle$  или  $\langle T, R, V, S' \rangle$ , относится тот или иной фриз из книги «Грамматика орнамента».

### Фризы и... Вазы и фризы

Греческие фризы в «Грамматике» Джонса – это не прямые копии какого-либо оригинала. В большинстве своем они срисованы с античных ваз из Британского



Рис. 15. Ахилл поражает Пентесилею

музея и Лувра (рис. 15). При этом цилиндрический узор, опоясывающий горловину вазы или расположенный вблизи ее дна, в процессе прорисовки фриза выпрямляется и периодически размножается влево и вправо, целиком заполняя горизонтальную полосу на плоскости. И наоборот, рисунок фриза легко переносится на боковую поверхность цилиндра. Нужно только из полосы фриза вырезать кусок длины в  $n$  периодов и склеить его концы. Получится цилиндрическое кольцо с соответствующим периодическим рисунком (табл. 3, столбец 3), которое как раз и можно рассматривать как боковую поверхность цилиндра.

Существует естественное соответствие между симметриями фриза и симметриями порожденного таким образом цилиндра:

- сдвиг фриза на период  $\bar{\tau} \rightarrow$  поворот цилиндра вокруг вертикальной оси на угол  $2\pi/n$  ;
- поворот фриза на  $180^\circ \rightarrow$  поворот цилиндра на  $180^\circ$  вокруг соответствующей горизонтальной оси, проходящей через центр цилиндра;
- скользящее отражение фриза  $\rightarrow$  отражение цилиндра относительно горизон-

Табл. 3. Фризы → цилиндры → молекулы

Тип фриза	Фриз	Цилиндрический аналог, $n = 6$	Молекула
$\langle T \rangle$			$k = 3$
$\langle T, R \rangle$			$k = 2$
$\langle T, V \rangle$			$k = 4$
$\langle T, S_0 \rangle$			$k = 3$
$\langle T, S' \rangle$			$k = 2$
$\langle T, R, V, S_0 \rangle$			$k = 8$
$\langle T, R, V, S' \rangle$			$k = 5$

тальной плоскости, проходящей через центр цилиндра, и последующий поворот вокруг вертикальной оси;

- вертикальное отражение фриза → отражение от соответствующей вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра.

### Фризы и молекулы

Наряду с греческими вазами существуют и другие материальные объекты, наделенные указанными цилиндрическими симметриями, например, химические молекулы (табл. 3, столбец 4). Если исключить молекулы, все атомы которых лежат на одной прямой, то все остальные молекулы, обладающие цилиндрической симметрией, разбиваются, как и фризы, на семь типов. Каждая такая молекула дополнительно снабжается целым параметром  $k$ , определяющим наименьший положительный угол  $2\pi/k$ , при повороте на который молекула совмещается сама с собой.

Добавим, что наряду с молекулами, обладающими цилиндрической симметрией, существует еще один класс молекул, симметрии которых связаны с симметриями правильных многогранников.

Дальнейшие интересные химические подробности вы можете найти на сайте

<http://symotter.org>, предназначенном для студентов-химиков. Это хорошая возможность для знакомства с симметрией молекул и для упражнений по распознаванию их типов симметрий.

### Периодические мозаики и двумерная кристаллография

Половина всех орнаментов, представленных в «Грамматике» Джонса, – это фризы, но есть еще одна большая составляющая – это периодические мозаики, заполняющие плоскость. В состав симметрий такой мозаики обязательно входят сдвиги *разных направлений* (рис. 16).

И тут тоже, как и для фризов, возникает естественная задача перечисления всех возможных типов симметрий таких мозаик.

В 1891 году в 28-м томе «Записок Императорского Санкт-Петербургского минералогического общества» была опубликована статья Евграфа Степановича Федорова «Симметрия правильных фигур», в которой он практически завершил свою знаменитую классификацию трехмерных кристаллических структур. Одновременно с Федоровым эту задачу решил немецкий математик Артур Шенфлис, и количество этих структур, подсчитанное обоими учеными, оказалось равным 230.

Для нас важно, что в том же самом 28-м томе «Записок» Федоров опубликовал еще одну свою статью «Симметрия на плоско-



Рис. 16. Мозаики из «Грамматики» Джонса, для первой указаны два ее непараллельных сдвига-симметрии

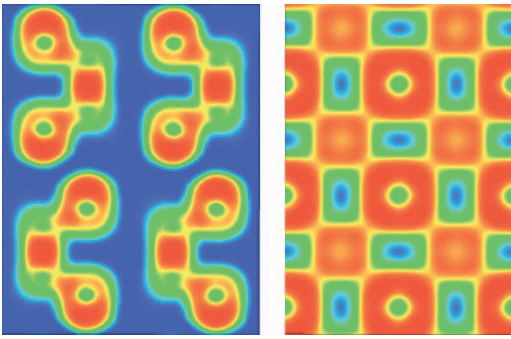


Рис. 17. Две мозаики – функции локализации электрона (воспроизводится с разрешения авторов: Youchun Wang, Fubo Tian et al.)

сти», где перечислил и все двумерные кристаллические структуры, общее число которых оказалось равным 17.

На самом деле задача перечисления всех возможных двумерных кристаллических структур и задача перечисления периодических мозаик на плоскости – это одна и та же задача. Для примера, посмотрите на две мозаики, показанные на рисунке 17. В действительности это карты функции локализации электрона в опре-

деленных кристаллографических плоскостях для систем Ga–Te при высоких давлениях.

Так что Федоров одновременно с перечислением двумерных кристаллических структур перечислил и все типы симметрий периодических мозаик на плоскости.

О мозаиках достаточно подробно рассказано в книге [2]. Для более глубокого погружения в тему рекомендуем книги [3] и [4], а также курс лекций [5].

Добавим еще, что основным алгебраическим инструментом исследования симметрий геометрических объектов являются группы. Но мы специально язык теории групп здесь не использовали.

### Литература

1. Owen Jones. The Grammar of Ornament. – 1856.
2. Г.Коксетер. Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.
3. Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс. Фейнмановские лекции по физике, т. 7. – М.: Мир, 1965.
4. Г. Вейль. Симметрия. – М.: Наука, 1968.
5. А.И. Шафаревич. Курс наглядной геометрии и топологии. Видеолекции 5,6.



## ТИПЫ ФРИЗОВ ПО ДЖОНУ КОНВЕЮ

Джон Конвей придумал обозначения для семи групп фризов и дал им названия, связанные со следами ног.

1.  $\langle T \rangle$ : Hop



2.  $\langle T, R \rangle$ : Spinning Hop



3.  $\langle T, V \rangle$ : Sidle



4.  $\langle T, S_0 \rangle$ : Jump



5.  $\langle T, S' \rangle$ : Step



6.  $\langle T, R, V, S_0 \rangle$ : Spinning Jump



7.  $\langle T, R, V, S' \rangle$ : Spining Sidle



# Космические тросовые системы

М. НИКИТИН, А. ТЕПЛЯКОВ

Самой известной космической тросовой системой является «Космический лифт». Эта фантастическая по размерам и возможностям конструкция, закрепленная на орбитальной платформе и предназначенная для подъема грузов в космос, должна иметь трос длиной более 50 тысяч километров, сделанный из материала с пока недостижимыми прочностными характеристиками. Удастся или нет воплотить в реальность идею К.Э. Циолковского о космическом лифте, покажет время, но другие, менее масштабные тросовые системы уже давно используются в космонавтике.

Наиболее известной из них является тросовая система безопасности космонавтов для выхода в открытый космос. Впервые такую систему опробовал советский космонавт Алексей Леонов в 1965 году, став первым человеком, побывавшем в открытом космосе. С той поры тросовые системы безопасности космонавтов используются постоянно для проведения профилактических и монтажных работ на космических станциях.

Другие практически реализуемые варианты использования тросовых систем в космонавтике представлены на рисунке 1 (из известной книги В.В. Белецкого и Е.М. Левина «Динамика космических тросовых систем»). На рисунке 1,а приведен вариант тросовой связки с аппаратом на высотах порядка 120 км, предназначенной для исследования верхней атмосферы и зондирования Земли с повышенным фото разрешением. На рисунке 1,б показана схема запуска спутника с орбитального самолета для перевода спутника на большие высоты с помощью вытягивающегося троса. Рисунок 1,в иллюстрирует схему сброса топливного бака с помощью троса

при подъеме орбитального аппарата для повышения грузоподъемности орбитального самолета. На рисунке 1,г представлена «рандеву» космического самолета с орбитальной станцией, снабженной привязным стыковочным узлом. Рисунок 1,д демонстрирует использование привязного баллона для торможения космического аппарата и входа его в атмосферу. На рисунке 1,е показана схема перемещения груза по «космическому элеватору», состоящему из нескольких тросовых связей.

Приведенных вариантов потенциально-го использования тросовых связей для различных задач пилотируемой космонавтики уже достаточно для того, чтобы увидеть разнообразные перспективы подобных систем и полезность знакомства с их механикой. Дополнительным стимулом изучения кинематики и динамики космических тросовых систем является то, что на их примере можно продемонстрировать эффективность применения понятия центра масс для описания поступательного и вращательного движения двух связанных тел в гравитационном поле Земли.

## Центр масс простейшей тросовой системы

Рассмотрим жестко связанную тросовую систему, состоящую из двух точечных тел массами  $m_1$  и  $m_2$  и находящуюся в силовом гравитационном поле (рис. 2). Положение этих точек и их центра масс относительно центрального силового поля задается радиус-векторами  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  и  $\vec{R}$ . Силы, действующие со стороны силового центра на тела и между ними (силы натяжения троса), обозначены векторами  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$ .

Запишем выражение для радиус-вектора центра масс:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

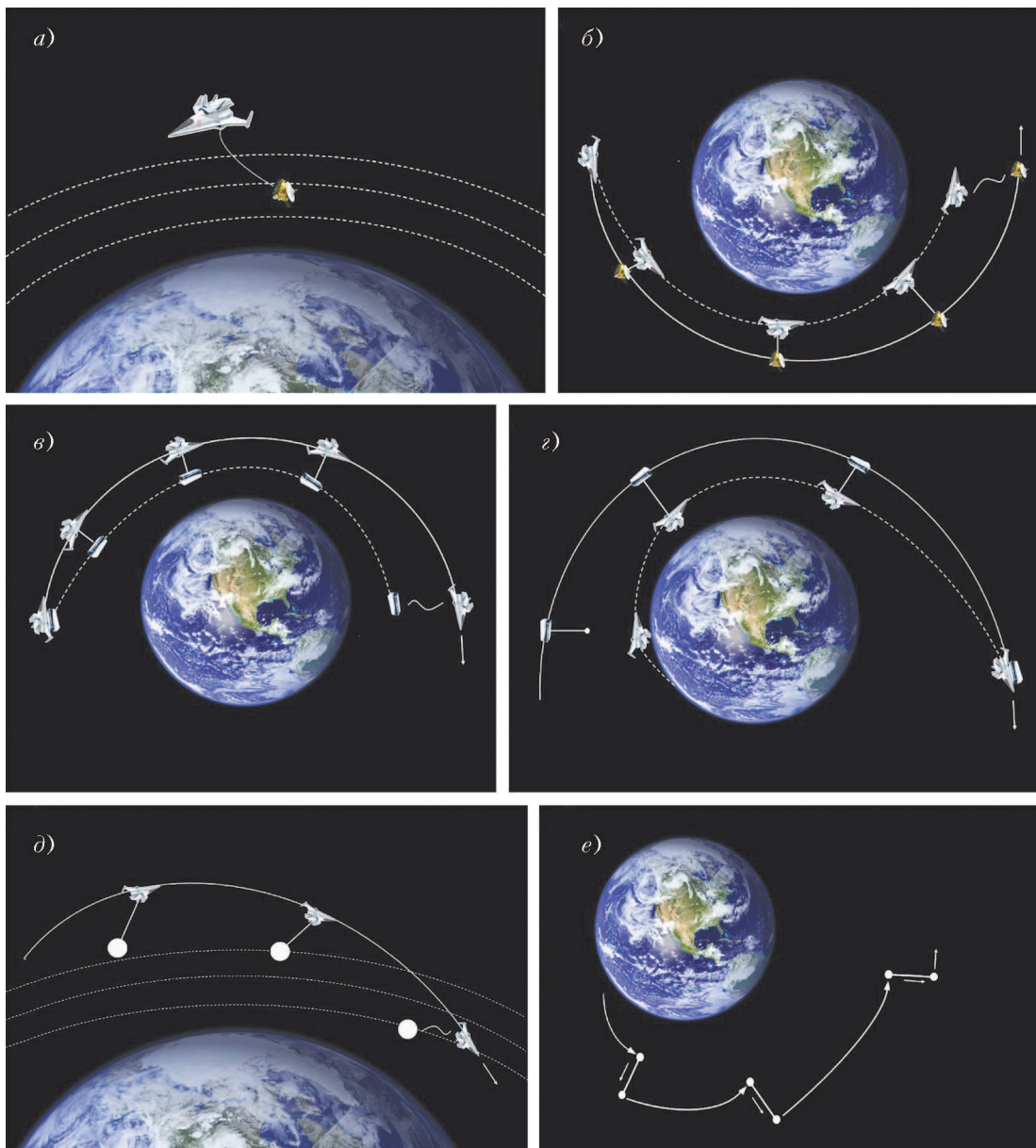


Рис. 1. Различные варианты использования космических тросовых систем

Как видно, при движении тросовой связки радиус-вектор центра масс  $\vec{R}$  будет меняться в соответствии с тем, как меняется сумма в числителе. А значит, его скорость будет являться линейной комбинацией скоростей обоих тел и будет равна

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}}{M},$$

где  $\vec{p}$  и  $M$  – полный импульс и полная масса двух связанных тел.

Линейная зависимость скорости центра масс от скоростей обоих тел связки указывает на то, что и ускорение центра масс будет линейной комбинацией ускорений этих тел:

$$\vec{a} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2},$$

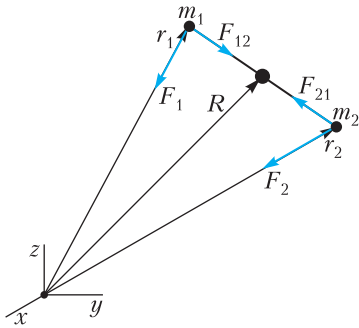


Рис. 2. Геометрия тросовой системы

или, с учетом второго и третьего законов Ньютона:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{M}. \end{aligned}$$

Полученная формула для ускорения центра масс и определяет полезность введения такого понятия, как центр масс. Из нее следует, что движение центра масс двух связанных точечных тел зависит только от действия внешних сил (этот вывод справедлив для систем, состоящих из произвольного числа точечных тел). В результате можно отслеживать движение системы в целом, не учитывая относительное движение связанных материальных точек. По этой причине для рассмотрения движения таких систем удобно использовать систему отсчета, размещенную в центре масс системы. Связь между радиус-векторами точек исходной системы отсчета, находящейся в силовом центре, и системы отсчета, связанной с центром масс, задается простыми соотношениями:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}'_1 \text{ и } \vec{r}_2 = \vec{R} + \vec{r}'_2,$$

где  $\vec{r}'_1$  и  $\vec{r}'_2$  – радиус-векторы точек в системе центра масс. Отсюда можно получить полезные соотношения, связывающие  $\vec{r}'_1$  и  $\vec{r}'_2$  друг с другом и с длиной троса  $l$ :

$$m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2 = 0, \quad r'_1 = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \text{ и } r'_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Еще об одном удивительном свойстве центра масс обязательно следует сказать. Как показывают наблюдения и теория,

центр масс является центром вращения жестко связанных конструкций и твердых тел. Это вращение является результатом движения различных частей тел друг относительно друга с сохранением геометрической формы. Примеры такого движения – вращение мяча во время полета или хоккейной шайбы при скольжении по льду. Причиной вращения может быть кратковременное или долговременное действие на тела моментов сил.

### Динамика простейшей тросовой связки, ориентированной по местной вертикали

Рассмотрим космическую тросовую связку, представленную на рисунке 3. Она состоит из двух тел, связанных тросом и ориентированных по местной вертикали. Такая ориентация является следствием гравитационной стабилизации, присущей силе тяготения (об этом будет рассказано дальше). Предположим, что вся связка движется с угловой скоростью  $\omega$  по круговым орбитам и масса троса значительно меньше масс тел связки. Для этих условий уравнения движения обоих связанных тел и их центра масс относительно центра Земли примут вид

$$\begin{aligned} m_1 \omega^2 r_1 &= \frac{\mu m_1}{r_1^2} + F_{12}, \\ m_2 \omega^2 r_2 &= \frac{\mu m_2}{r_2^2} - F_{21}, \\ (m_1 + m_2) \omega^2 R &= \mu \left( \frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{r_2^2} \right), \end{aligned}$$

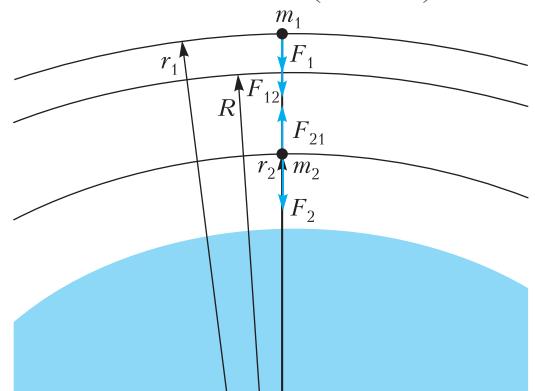


Рис. 3. Вертикально ориентированная связка



где  $\mu = GM$ ,  $G$  – всемирная постоянная тяготения,  $M$  – масса Земли. Разрешая эти уравнения, получим

$$\omega^2 = \frac{\mu}{r_1^2 r_2^2} \frac{m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2},$$

$$F_{12} = \frac{\mu m_1 m_2}{r_1^2 r_2^2} \frac{r_1^3 - r_2^3}{m_1 r_1 + m_2 r_2},$$

причем

$$r_1 = R + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \text{ и } r_2 = R - \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Силы натяжения троса  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  не только обеспечивают сцепление двух тел на разных орбитах и их синхронное движение, но и обуславливают появление микротяжести на этих телах. Сделаем оценку возможной величины микротяжести в предположении, что  $m_2$  значительно больше  $m_1$ , а длина троса составляет несколько сот километров. В этом случае

$$F_{12} \approx m_1 g \frac{3l}{R},$$

где  $l$  – длина троса, а  $R$  – радиус-вектор центра масс. Отсюда можно сделать вывод, что микротяжесть может составлять сотые доли от силы тяжести на Земле. Но даже такой малой величины достаточно для того, чтобы в условиях невесомости космических аппаратов микротяжесть проявлялось в динамике жидкостей и газов. В частности, она позволит осуществлять перекачку жидкости на орбите (например, топлива) и будет содействовать конвективному перемешиванию воздуха внутри жилых отсеков. Добавим, что в связке из двух космических аппаратов сила микротяжести, действующая на предметы в них, направлена вверх в нижнем аппарате и вниз в верхнем.

Небольшие по величине силы натяжения тросов дают еще одно очень важное преимущество для космических связок. Необходимую прочность тросов можно обеспечить с помощью тонких и легких тросов. Это особенно важно при использовании тросов длиной в сотни километров. Необходимо отметить, что развертывание таких длинных тросов в космосе само по себе является достаточно сложным делом, тре-

бующим глубокой проработки динамики гибких упругих систем в условиях невесомости.

### Гравитационная стабилизация тросовой связки

Мы уже говорили, что космические связки стремятся ориентироваться по местной вертикали. Разберемся, почему так происходит. На рисунке 4 изображена связка

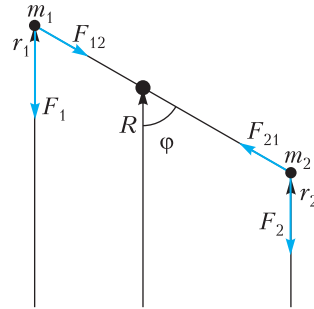


Рис. 4. Силы, действующие на наклоненную связку

из двух тел, наклоненная под углом к местной вертикали. На эту связку действуют силы гравитации и натяжения. Силы натяжения не вызывают появления момента сил относительно центра масс, так как их плечи равны нулю, а вот силы гравитации вызывают появление моментов сил противоположного знака. Момент силы, приложенный к нижнему телу, стремится развернуть связку по часовой стрелке, а приложенный к верхнему – против часовой стрелки.

Для простоты расчетов предположим, что силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  направлены параллельно друг другу. На самом деле они не параллельны из-за шарообразности Земли, но различие в углах намного меньше значений самих углов. С учетом сделанного ограничения моменты сил, действующие на массы  $m_1$  и  $m_2$ , равны

$$M_1 = F_1 r'_1 \sin \varphi,$$

$$M_2 = F_2 r'_2 \sin \varphi.$$

Найдем отношение моментов сил с учетом зависимости сил от радиального расстояния:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{F_1 r'_1 \sin \varphi}{F_2 r'_2 \sin \varphi} = \frac{\mu m_1 r_2^2 r'_1}{\mu m_2 r_1^2 r'_2}.$$

Здесь фигурируют произведения  $m_1 r_1'$  и  $m_2 r_2'$ , но они равны друг другу. В результате отношение моментов оказывается обратно пропорциональным отношению радиальных расстояний:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Из этой формулы следует, что момент  $M_1$  не равен моменту  $M_2$  и связка двух тел будет стремиться занять равновесное положение, при котором вращательные моменты равны, и ориентироваться по направлению местной вертикали. В этом и заключается физический механизм гравитационной стабилизации. Как видно из приведенного пояснения, в основе этой стабилизации лежит закон убывания силы гравитации по закону обратных квадратов.

### Закон сохранения момента импульса и его роль в динамике тросовых связок

Примечательной особенностью движения тел в гравитационных полях является сохранение их момента импульса. Под моментом импульса понимается произведение радиального расстояния до материальной точки на ее (азимутальный) поперечный по отношению к радиус-вектору импульс в этой точке. Отметим, что момент импульса вместе с полной механической энергией определяют форму орбит планет Солнечной системы и траекторию спутников Земли.

В случае чисто кругового движения тела вокруг Земли момент импульса равен  $\mathcal{L} = mvr$ . Воспользуемся этой формулой для нахождения момента импульса тросовой связки относительно центра Земли. Она будет равна сумме моментов импульсов обоих тел:

$$\mathcal{L} = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2,$$

или, поскольку  $v_1 = \omega r_1$  и  $v_2 = \omega r_2$ :

$$\mathcal{L} = \omega (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2).$$

Важным следствием гравитационной стабилизации тросовых связок является то, что при орбитальном движении они совершают вращение относительно своего цент-

ра масс. Это вращение порождает момент импульса связки относительно центра масс, равный

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \omega (m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2) = \\ &= \omega \left( m_1 \left( \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left( \frac{m_1 L}{m_1 + m_2} \right)^2 \right) = \\ &= \omega \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 = \omega \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (r_1 - r_2)^2. \end{aligned}$$

Вычтем теперь момент импульса вращения связки относительно центра масс из полного момента импульса. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R &= \mathcal{L} - \mathcal{L}' = \omega (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) - \\ &- \omega \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (r_1 - r_2)^2 = \omega \frac{(m_1 r_1 + m_2 r_2)^2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что полученное выражение для  $\mathcal{L}_R$  и есть момент импульса центра масс относительно центра Земли. На основании этого можно утверждать, что момент импульса связки относительно центра Земли равен сумме момента импульса самого центра масс и момента импульса вращательного движения связки относительно центра масс. Причем эта сумма остается постоянной при движении связки с возможным удлинением или сокращением длины и сохранении вертикальной ориентации связки, так как моменты сил  $\bar{F}_{12}$  и  $\bar{F}_{21}$ , действующие в связке, будут оставаться равными нулю. Равенство моментов сил нулю как раз и является необходимым и достаточным условием сохранения момента импульса механической системы.

### Полная механическая энергия космической связки

Для лучшего понимания динамики связки полезно разобраться в том, из каких составных частей складывается ее полная механическая энергия. Запишем выражение для полной механической энергии в случае связки, изображенной на рисунке 3:

$$E = E_{\kappa} + E_{\Pi} = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) - \mu \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right),$$

где  $E_k$  и  $E_n$  – кинетическая и потенциальная энергии связки. Используя связь  $r_1$  и  $r_2$  с радиус-вектором центра масс системы  $R$ , получим

$$E = \frac{(m_1 + m_2)\omega^2 R^2}{2} + \frac{m_1 m_2 \omega^2 l^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{\mu(m_1 + m_2)R}{r_1 r_2}.$$

Здесь первое слагаемое представляет кинетическую энергию центра масс, второе – кинетическую энергию вращательного движения тел относительно центра масс, третье – общую потенциальную энергию. Два первых слагаемых, таким образом, учитывают вклад в кинетическую энергию составляющих момента импульса связки.

### Движение связки при изменении относительного положения тел

Разбор различных полетных ситуаций простейшей космической связки начнем со случая намеренного расщепления или случайного обрыва троса. В этом случае орбитальная скорость нижнего тела окажется ниже первой космической, а верхнего – выше. В результате траектории расщепленных тел оказываются эллиптическими, причем для верхнего тела точка расщепления будет перигеем, а для нижнего – апогеем. Положения апогея и перигея для обоих тел нетрудно найти, используя закон сохранения полной механической энергии и знание того, что в точках апогея и перигея спутники движутся по дугам окружностей. Скорость орбитального движения в этих точках однозначно определяется моментом импульса тел:

$$v = \frac{\mathcal{L}}{mr}.$$

Это соотношение позволяет легко найти  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  с помощью закона сохранения механической энергии. Покажем это, так как использованный подход может быть полезным при решении задач небесной механики.

Запишем закон сохранения полной механической энергии для перигея и апогея:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\mu m}{r} = \frac{m\mathcal{L}^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r} = E,$$

где  $E$  – полная механическая энергия орбитального тела, отрицательная для круговых и эллиптических орбит. Вторые слагаемые в этом выражении описывают потенциальную энергию гравитационного взаимодействия тел с Землей, причем она отрицательна, что характерно для силы притяжения. Полученное уравнение сводится к квадратичному уравнению относительно переменной  $r$ :

$$r^2 + \frac{\mu m r}{E} + \frac{\mathcal{L}^2}{2mE} = 0.$$

Решениями этого уравнения являются  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$ , связанные соотношением

$$r_{\min} \cdot r_{\max} = \frac{\mathcal{L}^2}{2mE}.$$

С помощью этой формулы можно найти  $r_{\min}$  или  $r_{\max}$ , зная один из этих параметров, момент импульса  $\mathcal{L}$  и полную механическую энергию  $E$ .

Рассмотрим теперь ситуацию, связанную со сближением тел связки. В этом случае характер орбитального движения системы усложняется, хотя общие тенденции достаточно понятны. По мере сближения тел их траектории будут сходиться и при стыковке сольются с траекторией центра масс. Не столь просто обстоит дело с самой траекторией центра масс. Попытаемся разобраться в этом вопросе детальнее.

Прежде всего обратим внимание на то, что момент импульса и кинетическая энергия связки, обусловленные вращением относительно центра масс, значительно меньше полного момента импульса и полной кинетической энергии даже для связки длиной в десятки или даже в несколько сотен километров. Это указывает на то, что изменение траектории центра масс не будет значительным.

Можно ожидать, что при сближении тел связки траектория центра масс будет перестраиваться от начальной окружности к заключительному эллипсу. При этой перестройке в соответствии с законом сохранения момента импульса будет выполняться условие

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \omega = \\ &= \omega' (m_1 + m_2) R^2 > \omega (m_1 + m_2) R^2, \end{aligned}$$

где  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $R$  и  $R'$  – начальные и конечные угловые скорости и радиус-векторы центра масс связки. Полученное соотношение указывает на то, что при подъеме нижнего тела будут меняться и угловая скорость, и величина радиус-вектора. Уточним сказанное.

Выясним возможную роль сил натяжения троса  $\vec{F}_{12}$  и  $\vec{F}_{21}$  при подтягивании тел. Удобнее это сделать в системе отсчета, связанной с центром масс. В этой системе сила  $\vec{F}_{12}$  совершает работу против суммарного действия силы гравитации и центробежной силы инерции, сила  $\vec{F}_{21}$  – против суммарного действия центробежной силы инерции и силы гравитации. Действия этих сил взаимно уравновешены в центре масс перед процедурой сближения. Ниже центра масс преобладает сила гравитации, выше – центробежная сила инерции. При сближении тел силы натяжения троса совершают положительную работу, которая идет на увеличение полной механической энергии связки. Возрастание полной механической энергии связки  $E$  должно привести к увеличению значения радиус-вектора центра масс, так как

$$E = -\frac{\mu m}{2a},$$

где  $a$  – большая полуось орбиты. Из приведенного соотношения следует, что при сближении тел параметр орбиты  $a$  должен возрасти, а центр масс связки – подниматься. Согласно третьему закону Кеплера это должно привести к незначительному увеличению периода обращения связки вокруг Земли и, следовательно, к уменьшению угловой скорости вращения самой связки.

Операция подъема груза на тросе обладает большой перспективой для использования при переводе полезных грузов с низких орбит на более высокие. Дело в том, что при таком переводе работа, затрачиваемая на подъем, будет во много раз меньше, чем при ракетном подъеме. Действительно при перемещении полезного груза по тросу необходимо совершать работу против суммарного действия силы

тяжести и центробежной силы инерции, а при ракетном подъеме – против сил тяжести не только груза, но и несущей части ракеты. Рекомендуем проделать самостоятельные выкладки, чтобы убедиться в справедливости данного вывода. При рассмотрении этой задачи советуем ограничиться околосемными высотами  $h$  и длиной троса  $l$ , удовлетворяющими условиям  $h \ll R_0$  и  $l \ll R_0$ , где  $R_0$  – радиус Земли. Подобный лифтинг грузов можно будет использовать не только на Земле, но и на Луне и на Марсе в будущем при колонизации этих космических объектов.

Рассмотрим теперь возможное движение связки в случае расхождения составляющих ее тел. Подобное расхождение может начаться, если нижнее или верхнее тело принудительно отводить от другого. При таком разводе нарушатся первоначальные условия динамического равновесия и тела начнут двигаться по новым траекториям. Наличие троса при этом приведет к проявлению следующих эффектов:

- 1) часть момента импульса и механической энергии будет передаваться от нижнего тела связки к верхнему;
- 2) трос будет стремиться расположиться в направлении местной вертикали из-за действия гравитационной стабилизации;
- 3) угловая скорость у обоих тел окажется одинаковой.

Отметим, что подобная упрощенная картина связанного движения оказывается справедливой только при очень медленной перестройке орбит связки. На самом деле все происходит значительно сложнее, причем строгий анализ процедуры разведения тел требует сложных расчетов. По этой причине ограничимся максимально упрощенным анализом спуска более тяжелого нижнего тела, когда оно получает в начальный момент дополнительный импульс в радиальном направлении. В этом случае момент импульса двух тел не меняется, также не меняется полная механическая энергия верхнего тела, зато меняется энергия нижнего в сторону увеличения.

С учетом указанных ограничений запишем законы сохранения момента импульса

и полной механической энергии связки в виде

$$(m_1 + m_2)\sqrt{\mu r_0} = \omega(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2),$$

$$-\frac{\mu m_1}{2r_0}(1 - e^2) - \frac{\mu m_2}{2r_0} = \frac{\omega^2}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) - \mu \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right).$$

При записи левой части первого уравнения используется выражение для орбитальной скорости  $v = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$  и предполагается,

что после получения радиального импульса нижнее тело движется по эллиптической траектории с эксцентриситетом орбиты  $e = 0,0045$ . Параметры  $r_1$  и  $r_2$  системы связаны друг с другом простым соотношением:  $r_1 = r_2 - l$ , где  $l$  — длина троса. С учетом этой связи система записанных уравнений может быть разрешена для различных значений длины троса.

На рисунке 5 представлены результаты расчетов высоты  $h$  второго тела и центра масс тросовой системы с учетом длины троса  $l$ , полученные для масс связки  $m_1 = 4000$  кг и  $m_2 = 200$  кг. Начальная высота неразделенных тел  $h_0 = 400$  км. Примечательной особенностью является возрастание высоты верхнего тела с увеличением длины связки. Это прямо указывает на возможность передачи момента импульса и энергии от нижнего тела к верхнему. Для того чтобы такая передача происходила, нижнее тело связки должно снижаться.

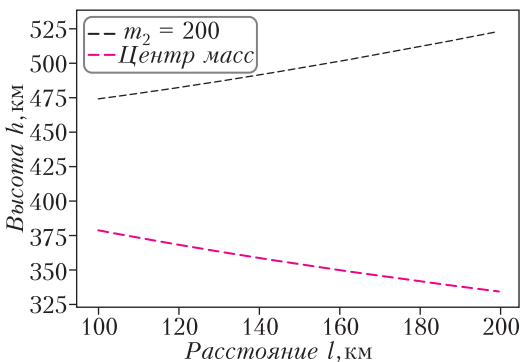


Рис. 5. Взаимосвязи высоты верхнего тела, высоты центра масс и длины троса связки

Линия центра масс и связана с этим снижением. Отметим, что результаты рисунка 5 хорошо передают ситуацию, изображенную на рисунке 1,б и связанную с операцией перевода спутника за более высокую орбиту за счет момента импульса и механической энергии космического шаттла.

### Заключение

После прочтения данного материала у юного читателя может возникнуть иллюзия, что механика космических связок проста. На самом деле и теория, и практика тросовых систем исключительно сложны для точного описания динамики таких систем и технической реализации заложенных в них возможностей. Эти сложности связаны с рядом причин. Первая из них заключается в трудностях математического описания механики гибких деформируемых тросов, способных совершать сложные по форме движения, в том числе колебательные и волновые. Вторая связана с вариативностью относительного движения тел связки как в случае разведения, так и в случае стыковки. Это порождает большие проблемы при разматывании и захватывании тросов. Наконец, следует отметить важную роль, которую могут играть при движении связок силы взаимодействия тел с верхней атмосферой, ионосферой и магнитным полем Земли.

# Из истории раннего развития физики

*С.ИНШАКОВ*

Физика – это наука об окружающем мире. Также как химия, биология, социология... Однако мир един, поэтому древние познавали его в рамках одной науки – натурфилософии. На том уровне познания этого было достаточно. Специализация по разделам возникла позже. Для физики это был XVII век. Именно тогда Исааком Ньютоном была предложена новая структура организации научного познания – метод основополагающих законов (метод принципов). Сами эти законы (принципы) есть обобщение опытных фактов.

Физика – естественная наука. Отличие естественных наук от абстрактных состоит в различном характере их основ: в естественных – это опытные факты, в абстрактных – это постулаты. Математика, например, естественной наукой не является, это абстрактная наука. Но физика не может детально изучать окружающий мир без такого инструмента, как абстрактная математика.

Изучение природы происходит последовательными приближениями. Сначала создается абстрактная математическая модель наблюдаемого явления с помощью соответствующего математического аппарата. После этого делается попытка объяснения существующих опытных данных, а также и предсказания новых. Иногда модель позволяет объединить явления из разных разделов, тогда происходит существенный скачок в познании мира: меньшим числом теорий (моделей) объясняется прежний объем фактов.

Рассмотрим два примера, относящихся к разным этапам развития физической науки.

## Пример 1

Зимой 1819/20 года датский профессор физики Ханс Кристиан Эрстед читал в Копенгагенском университете курсы гальванизма, электричества и магнетизма. В то время к гальванизму относились явления, связанные с постоянным электрическим током, к электричеству – электростатические явления, к магнетизму – явления, происходящие с постоянными магнитами. Было три раздела, описываемые тремя моделями, но к середине XIX века их, с помощью работ Эрстеда, Фарадея и Ампера, удалось объединить в один раздел – электромагнетизм. Сделал это Джейм Клерк Максвелл, он все свел к четырем уравнениям, которые теперь носят его имя. Вот он, прогресс.

Получение надежных экспериментальных данных – чрезвычайно сложная задача, нужно учитывать уровень той техники, в рамках которой проводятся эксперименты. К примеру, что может сегодня быть проще закона Ома для участка цепи? Но Георг Ом получил свой закон в 1827 году, когда гальванические элементы были далеки от совершенства, напряжение плыло. Поэтому школьному учителю Ому пришлось пользоваться термоэлементами в качестве источников тока.

Характерная особенность моделей – при возможном абсолютном различии новая модель должна дополнять старую, т.е. выдавать тот же результат в прежней области применения, и дополнительно работать в новой, где старая неприменима.

## Пример 2

Рассмотрим системы мира, созданные Аристотелем (384–322 до н.э.) и Коперни-

ком (1474–1543). Между ними больше тысячи лет.

### Модель Аристотеля – геоцентрическая

Семь видимых светил – Солнце, Луна, Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн – прикреплены к *хрустальным* сферам (рис. 1). Сразу решены два вопроса –

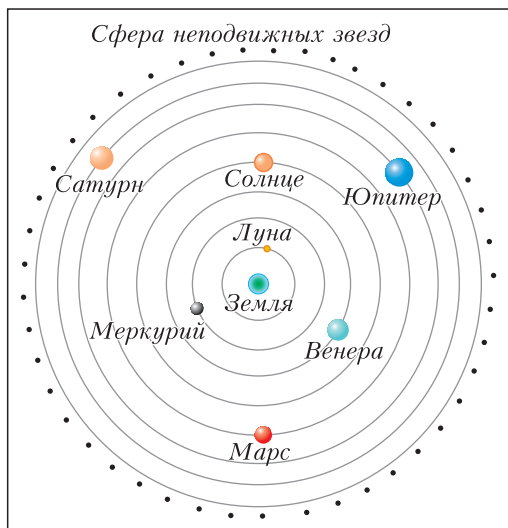


Рис. 1. Система Аристотеля

что держит светила и почему эта поддерживающая конструкция не видна. Есть и восьмая сфера – в ней закреплены звезды. Все сферы равномерно вращаются вокруг Земли, поэтому система называется геоцентрической. Между сферами звучит музыка. Все очень красиво и величественно.

С течением времени угловые положения светил стали определять со все большей точностью, в результате их измеренные положения стали отличаться по отношению к вычисленным по модели Аристотеля. Птолемей усовершенствовал систему Аристотеля – в его модели с хрустальными сферами вращаются не светила, а центры маленьких хрустальных сфер – деференты, планеты же заключены в эти маленькие сферы, эпициклы, и вращаются вместе с ними (рис. 2). Вопрос, как одна хрустальная сфера проходит через другую хрустальную сферу, да еще и крутится, даже не возникал. С ростом точности изме-

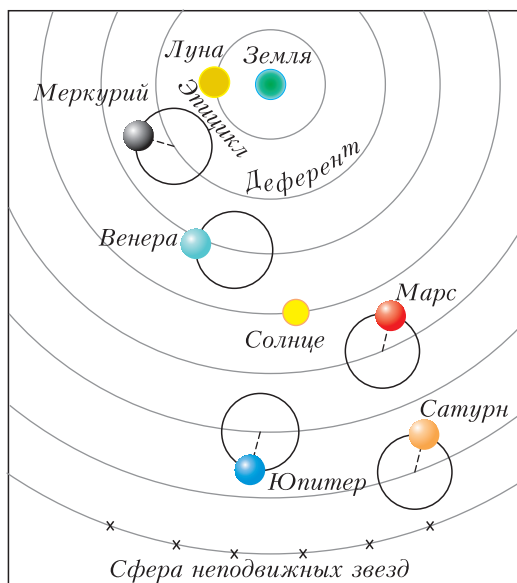


Рис. 2. Система Птолемея

рений число эпициклов для одного светила стало возрастать, доходя до двух-трех. Сложность невероятная, но все освящено церковью, сомневаться было нельзя.

### Система Коперника – гелиоцентрическая

Николай Коперник заметил, что модель Аристотеля–Птолемея не объясняла изменение блеска планет, в частности Марса. Все небесные светила находятся практически на постоянных расстояниях от центра Мира – Земли (рис. 3), поэтому и блеск не должен меняться. Поскольку оптических средств наблюдения еще не было, то изменение угловых размеров планет визуально сводилось к увеличению

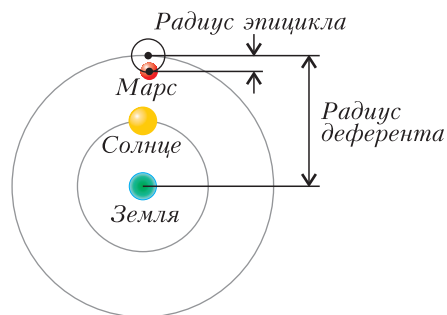


Рис. 3. Положение Марса и Земли в модели Птолемея

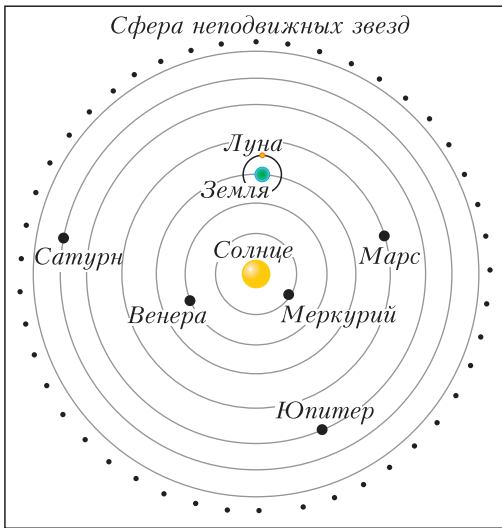


Рис. 4. Система Коперника

или ослаблению их блеска. Изменения блеска были, а расстояния в этой модели Вселенной при этих положениях планет практически не менялись. Эпициклы не могли обеспечить значительного изменения расстояния от Земли, поскольку радиус деферента много больше радиуса эпицикла.

Тогда Коперник рассмотрел гелиоцентрический вариант системы, когда небесные сферы вращаются вокруг Солнца (рис. 4). В этой модели расстояние между Землей и Марсом будет меняться. Случай самого близкого расположения называют противостоянием, а самого дальнего – соединением. При этом изменение блеска планет при

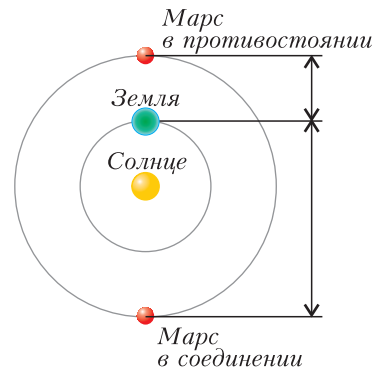


Рис. 5. Противостояние и соединение Марса и Земли в модели Коперника

соединении и противостоянии получило объяснение – расстояние до Земли различно в эти моменты (рис. 5). Необходимость в эпициклах исчезла, да и расчеты значительно упростились. Кстати, в чистом виде планету в соединении наблюдать нельзя из-за того, что оно реализуется во время светового дня, реально можно наблюдать положение планеты недалеко от соединения на восходе или закате Солнца.

Фундаментальный труд Коперника назывался «Об обращении небесных сфер». По сути, обычный перенос начала системы координат позволил сильно упростить расчеты положения светил. Но церковь тщательно оберегала свое «единственное верное» представление о мире. Рассчитывать положения светил по методу Коперника она допускала, но не более, Земля по-прежнему находилась в центре Вселенной.

### Вниманию наших читателей

Подписаться на журнал «Квант» можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: [biblio.mcsme.ru](http://biblio.mcsme.ru)), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте <http://kvant.ras.ru>



# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи Ф2741–Ф2744 предлагались на муниципальном этапе LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

## Задачи M2734–M2737, Ф2741–Ф2744

**M2734.** В вершинах  $n$ -угольника расставляют вещественные числа, а на каждой его стороне записывают сумму двух чисел, стоящих в концах этой стороны. Для каких  $n$  могло оказаться, что суммы, записанные на сторонах, взятые в некотором порядке, равны  $1, 2, 3, \dots, n$ ?

Фольклор

**M2735.** Пусть  $AB$  – диаметр окружности  $\Omega$  с центром  $O$  (рис. 1). Точки  $C, D, X$  и  $Y$  выбраны на  $\Omega$  так, что отрезки  $CX$  и  $DX$

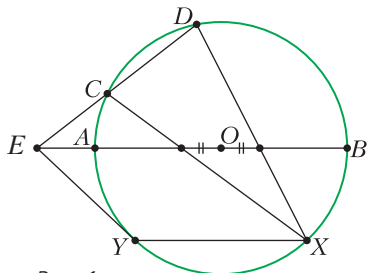


Рис. 1

пересекают отрезок  $AB$  в точках, симметричных относительно  $O$ , а  $XY \parallel AB$ . Пусть прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ . Докажите, что касательная  $\Omega$ , проведенная через  $Y$ , проходит через  $E$ .

К.Кноп

**M2736.** Найдите остаток при делении биномиального коэффициента  $C_{3^n}^{2^n}$  на  $3^{n+1}$ .

В.Расторгуев

**M2737.** На доске выписаны все делители числа а)  $8000000$ , б)  $360^{10}$ . За один ход можно взять два числа, ни одно из которых не делится на другое, и заменить числа на их НОД и НОК. В какой-то момент новые операции выполнять будет нельзя. Сколько различных чисел будет на доске в этот момент?

В.Брагин

**Ф2741.** Система, изображенная на рисунке 2, состоит из трех блоков, невесомых и нерастяжимых нитей и двух грузов. Масса левого груза  $m = 1$  кг, два белых блока невесомы, а масса серого блока  $m_0 = 200$  г. Система находится в равновесии. Ускорение свободного падения  $g = 10$  Н/кг.

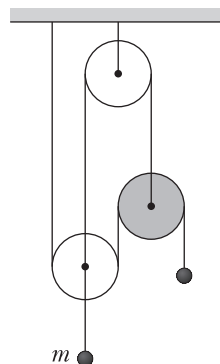


Рис. 2

1) Чему равна масса правого груза? Ответ выразите в граммах, округлите до целого числа.

2) Ось серого блока утяжеляют, а массу правого груза уменьшают так, что система по-прежнему находится в равновесии. На какую максимальную величину можно утяжелить ось массивного блока? Ответ выразите в граммах и округлите до целого числа.

А.Бычков

**Ф2742.** В калориметр с горячей водой бросили кусочек льда, температура которого была равна 0 °С. После установления теплового равновесия температура воды понизилась на 12 °С. Когда в калориметр бросили второй такой же кусочек льда, температура воды понизилась еще на 10 °С. На сколько градусов понизится температура воды, если в нее бросить третий такой же кусочек льда, который полностью растает? Теплоемкостью калориметра и теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Ответ выразите в градусах Цельсия и округлите до десятых долей.

*А.Бычков*

**Ф2743.** Школьник собрал почти бесконечную электрическую цепь, состоящую из очень большого числа резисторов (рис. 3).

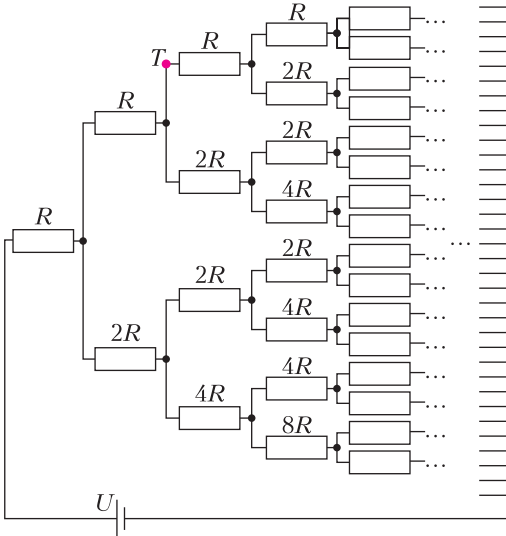


Рис. 3

Если двигаться вдоль этой схемы слева направо, то после каждого ее разветвления сопротивление резистора, находящегося выше точки разветвления, равно сопротивлению резистора, находящегося слева от точки разветвления, а сопротивление резистора, находящегося ниже точки разветвления, в два раза больше, чем сопротивление резистора, находящегося выше точки разветвления. Напряжение источника в этой цепи  $U = 27$  В. Найдите силу тока, текущего через поперечное сечение

провода в точке  $T$ , если  $R = 20$  Ом. Ответ выразите в амперах и округлите до десятых долей.

*М.Ромашка*

**Ф2744.** Два плоских зеркала размерами  $a \times a$ , где  $a = 10$  см, расположены перпендикулярно плоскости рисунка, касаются друг друга и образуют угол  $\beta = 70^\circ$  (рис. 4).

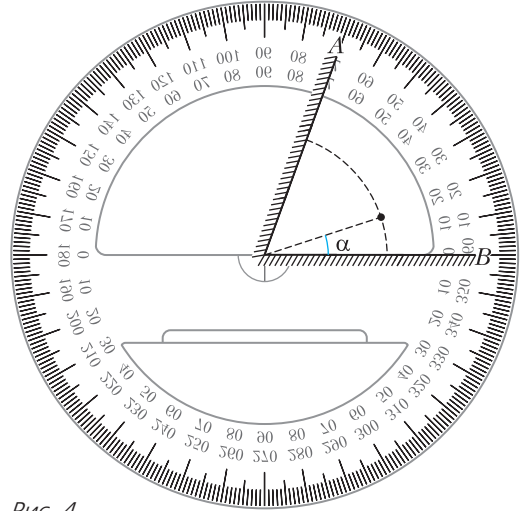


Рис. 4

Между зеркалами на расстоянии  $l = 5$  см от точки их касания располагают небольшое тело, размерам которого можно пренебречь. Угол между зеркалом  $B$  и направлением из точки соединения зеркал на тело обозначим  $\alpha$ . Определите, при каких значениях угла  $\alpha$  в системе зеркал будут создаваться 5 изображений (сам предмет за изображение не считается).

*М.Карманов*

**Решения задач М2722–М2725,  
Ф2729–Ф2732**

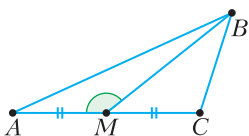
**М2722.** Дан остроугольный неравносторонний треугольник. Одним действием разрешено разрезать один из имеющихся треугольников по медиане на два треугольника. Могут ли через несколько действий все треугольники оказаться равнобедренными?

**Ответ:** не могут.

Докажем, что всегда среди имеющихся треугольников найдется неравносторонний

непрямоугольный треугольник. В начальный момент это так.

Пусть на очередном ходе имеющийся неравобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  был разрезан по медиане  $BM$  (см. рисунок). Так как он неравобедренный, медиана  $BM$  не совпадает с высотой, т.е. один из углов  $AMB$ ,  $CMB$  – тупой. Пусть это угол  $AMB$ . Покажем, что  $AMB$  – нужный нам треугольник. Он тупоугольный (а значит, непрямоугольный). Так как  $\angle ABC \neq 90^\circ$ , медиана  $BM$  не равна половине стороны  $AC$ , следовательно,  $AM \neq BM$ . Кроме того,  $AB > AM$  и  $AB > BM$  ( $AB$  – сторона напротив наибольшего угла в треугольнике  $AMB$ ). Значит, треугольник  $AMB$  – неравобедренный.



Е.Бакаев

**M2723.** Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых – попарно различные натуральные числа, есть ровно  $N$  фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за  $N$  проверок можно найти все фальшивые купюры, если: а)  $N = 2$ ; б)  $N = 3$ .

а) Проверив набор из всех купюр, найдем сумму  $S$  номиналов двух фальшивок. Далее можно действовать по-разному.

*Способ 1.* Пары купюр с суммой номиналов  $S$  не пересекаются. Взяв по купюре из каждой пары, найдем за одно испытание одну фальшивку в этом наборе. Тем самым, пара фальшивок будет определена.

*Способ 2.* Проверим набор всех купюр, номиналы которых меньше  $S/2$ . В этом наборе ровно одна фальшивка, значит, мы узнаем ее. Вторая фальшивка – та, номинал которой дополняет номинал первой до  $S$ .

б) Проверив набор из всех купюр, найдем сумму  $S$  номиналов всех трех фальшивок. Укажем два алгоритма, как действовать дальше.

*Способ 1.* Для второй проверки включим в набор наименьшую по номиналу купюру из каждой тройки с суммой  $S$ . В этот набор

заведомо не войдет никакая наибольшая купюра  $K$  из каждой тройки: действительно, если  $K$  – наименьшая по номиналу купюра в тройке  $T_1$  и наибольшая в тройке  $T_2$ , то сумма номиналов  $T_2$  меньше суммы номиналов  $T_1$ . Значит, в проверенном наборе одна или две фальшивки. Пусть сумма их номиналов равна  $D$ . Все подозрительные тройки (с суммой номиналов  $S$ ) разбиваются на тройки первого типа – с парой купюр с суммой номиналов  $D$  и купюрой  $S - D$ , и второго типа – с купюрой номинала  $D$  и парой купюр с суммой номиналов  $S - D$ . Заметим, что тройка второго типа  $(D, B_1, B_2)$  не пересекается с тройкой первого типа  $(A_1, A_2, S - D)$ . Действительно,  $A_1 + A_2 = D$ , откуда  $A_1 < D$ ,  $A_2 < D$ . В тройке второго типа  $D$  – наименьшая по номиналу, поэтому  $D < B_1$  и  $D < B_2$ . Но так как  $B_1 + B_2 = S - D$ , имеем  $B_1 < S - D$  и  $B_2 < S - D$ .

Теперь для третьей проверки достаточно выбрать по одной купюре, не равной  $D$ , из троек второго типа и по одной купюре, не равной  $S - D$ , из троек первого типа. В этом наборе ровно одна фальшивка, узнав которую, мы однозначно определим тройку фальшивок.

*Способ 2.* Среди купюр, больших  $S/3$ , одна или две фальшивых (назовем их крупными). Узнаем сумму  $s$  их номиналов. Имеется два случая.

1)  $s \leq 2S/3$ . Тогда крупная купюра одна. Следовательно, среди купюр, меньших  $(S - s)/2$ , ровно одна фальшивая. Узнаем ее, а далее однозначно определяется и третья фальшивая.

2)  $s > 2S/3$ . Если крупная купюра одна, то оставшиеся две фальшивые в сумме дают  $S - s$ , что меньше  $S/3$ , и ровно одна из них меньше  $(S - s)/2$ . Если же крупных две, наименьшая фальшивая купюра имеет номинал  $S - s$  и ровно одна из крупных фальшивых меньше  $s/2$ , но больше  $S/3$ . В любом случае в объединении интервалов  $(0, (S - s)/2)$  и  $(S/3, s/2)$  находится ровно одна фальшивая купюра. Узнаем ее (проверив все купюры с номиналами из указанных интервалов) и пойдем, в каком из

подслуцаев мы находимся. Это укажет оставшиеся фальшивые купюры.

С.Токарев

**M2724.** В бесконечной арифметической прогрессии, где все числа натуральные, нашлись два числа с одинаковой суммой цифр. Обязательно ли в ней найдется еще одно число с такой же суммой цифр?

**Ответ:** не обязательно.

Примером искомой прогрессии является прогрессия 2, 1010, 2018, ..., у которой первый член  $a_1=2$  и разность  $d=1008$ . Покажем, что только два первых члена этой прогрессии имеют сумму цифр, равную 2. Так как  $d$  кратно 16, все члены прогрессии дают остаток 2 при делении на 16. Число с суммой цифр 2 представляется как сумма двух (не обязательно различных) степеней десятки. Степени 1, 10,  $10^2$  и  $10^3$  дают остатки 1, 10, 4 и 8 при делении на 16, остальные степени кратны 16. Остаток 2 можно получить лишь двумя способами:  $1+1$  или  $10+8$ , они соответствуют числам 2 и 1010. Значит, других чисел с суммой цифр 2 в данной прогрессии нет. Интересно выяснить, существует ли арифметическая прогрессия из натуральных чисел, в которой чисел с одной и той же суммой цифр – заданное конечное количество.

А.Шаповалов

**M2725.** Даны два одинаково ориентированных правильных  $(2n)$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  и  $B_1B_2 \dots B_{2n}$ . Проведены серединные перпендикуляры  $l_i$  к отрезкам  $A_iB_i$ . Пусть прямые  $l_i$  и  $l_{i+1}$  пересекаются в точке  $K_i$  (здесь и далее индексы  $i$  и  $i+2n$  считаем одинаковыми). Обозначим через  $m_i$  прямую  $K_iK_{i+n}$ . Докажите, что  $n$  прямых вида  $m_i$  пересекаются в одной точке и при этом углы между прямыми  $m_i$  и  $m_{i+1}$  равны.

Существует поворотная гомотетия, переводящая  $(2n)$ -угольник  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  в  $B_1B_2 \dots B_{2n}$  (данные  $(2n)$ -угольники не совмещаются параллельным переносом, так как в этом случае все прямые  $l_i$  будут параллельны). Пусть  $S$  – центр этой поворотной гомотетии. Тогда все треугольники

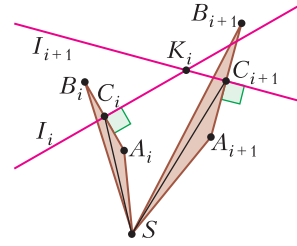


Рис. 1

$SA_iB_i$  подобны и одинаково ориентированы. Пусть  $C_i$  – середины отрезков  $A_iB_i$ . Тогда все треугольники  $SA_iC_i$  подобны и одинаково ориентированы (рис. 1). Следовательно, существует поворотная гомотетия с центром  $S$ , переводящая многоугольник  $A_1A_2 \dots A_{2n}$  в  $C_1C_2 \dots C_{2n}$ . Поэтому  $C_1C_2 \dots C_{2n}$  – правильный многоугольник. Также подобие  $SA_iC_i \sim SA_{i+1}C_{i+1}$  переводит  $l_i$  в  $l_{i+1}$  (так как  $l_i$  – перпендикуляр к  $A_iC_i$ , проходящий через  $C_i$ ). Поэтому углы  $\angle(SC_i, l_i)$  равны между собой. Теперь конструкция выглядит так: дан  $(2n)$ -угольник  $K_1K_2 \dots K_{2n}$  и точка  $S$ . На прямых  $K_{i-1}K_i$  нашлись точки  $C_i$  такие, что углы  $\angle(SC_i, C_iK_i)$  равны одному и тому же значению  $\varphi$  и  $(2n)$ -угольник  $C_1C_2 \dots C_{2n}$  правильный.

Поскольку  $\angle(SC_i, C_iK_i) = \angle(SC_{i+1}, C_{i+1}K_i) = \varphi$ , точки  $S, C_i, K_i, C_{i+1}$  лежат на одной окружности (рис. 2). Пусть  $k_i$  – серединный

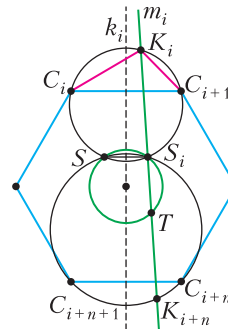


Рис. 2

перпендикуляр к  $C_iC_{i+1}$  (или к  $C_{i+n}C_{i+n+1}$ ), а  $S_i$  – точка, симметричная  $S$  относительно  $k_i$  (так что  $S_i$  и  $S_{i+n}$  – это одна и та же точка, а прямые  $k_i$  и  $k_{i+n}$  совпадают). Тогда  $S$  и все точки  $S_i$  лежат на одной окружности  $\omega$  с центром в центре правильного  $(2n)$ -угольника  $C_1C_2 \dots C_{2n}$ . Из симметрии относительно  $k_i$  видим, что точки  $S, C_i, C_{i+1}, S_i$  лежат на одной окружности, значит, все 5 точек  $S, C_i, C_{i+1}, S_i, K_i$  лежат на одной окружности. Отсюда  $\angle(SS_i, K_iS_i) = \varphi$ . Аналогично доказываем, что  $\angle(SS_i, K_{i+n}S_i) = \varphi$ . Тем самым, точки  $K_i, K_{i+n}, S_i$  лежат на одной прямой, т.е.

прямая  $m_i$  проходит через точку  $S_i$ . Пусть  $T$  – вторая точка пересечения прямой  $m_i$  с окружностью  $\omega$ . Тогда (ориентированная) дуга  $ST$  окружности  $\omega$  равна  $2\varphi$ . Этим условием точка  $T$  однозначно определяется. Значит, если мы повторим те же рассуждения, то поймем, что все прямые  $m_i$  (для всех индексов  $i$ ) проходят через ту же точку  $T$ . Итак,  $T$  – общая точка всех прямых  $m_i$ . Далее, угол между прямыми  $m_i$  и  $m_{i+1}$  равен  $\angle(S_iT, S_{i+1}T) = \angle(S_iS, S_{i+1}S)$ . Но поскольку  $S_iS \perp k_i$  и  $S_{i+1}S \perp k_{i+1}$ , имеем  $\angle(m_i, m_{i+1}) = \angle(S_iS, S_{i+1}S) = \angle(k_i, k_{i+1})$ . Но каждый из углов между прямыми  $k_i$  и  $k_{i+1}$  равен  $\pi/n$ . Отсюда следует требуемое утверждение о равенстве углов.

Отметим, что вначале задача была придумана первым автором для случая  $n = 2$  (т.е. для случая квадратов  $A_1A_2A_3A_4$  и  $B_1B_2B_3B_4$ ) и в таком виде предлагалась на 18-й Геометрической олимпиаде имени И.Ф.Шарыгина.

*Чан Куанг Хунг, А. Заславский*

**Ф2729.**<sup>1</sup> *Рыхлые снежинки (комочки снега) имеют характерный размер 0,5 см и падают в спокойном воздухе со скоростью 1 м/с. Оцените количество атомов, составляющих одну такую снежинку.*

Падение комочка снега с постоянной скоростью означает, что сила тяжести скомпенсирована силой сопротивления воздуха. Характер зависимости силы сопротивления подвижной среды от скорости движения объекта в этой среде (см. рисунок) определяется величиной, которая называется числом Рейнольдса:  $Re = \rho d v / \eta$ . Здесь  $\rho$  – это плотность среды,  $d$  – характерный размер движущегося объекта,  $v$  – скорость его движения относительно среды,  $\eta$  – динамическая вязкость среды. Плотность воздуха  $\rho \approx 1,2 \text{ кг/м}^3$ , а вязкость воздуха весьма мала:  $\eta \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ . В ситуации, описанной в условии,  $Re \approx 350$ . Для чисел Рейнольдса, меньших величины  $10^3 \text{ Па} \cdot \text{с}$ , обтекание тела в форме шара (такой формой, будем считать, обладает снежинка) потоком среды ламинарное, и

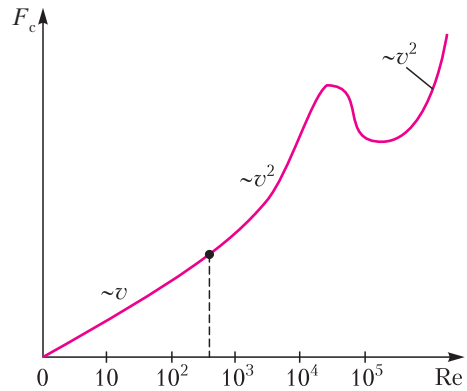


Рис. 1

для силы сопротивления можно использовать формулу, выведенную Стоксом:

$$F = 3\pi\eta v \approx 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

При равномерном движении сила сопротивления уравновешивается силой тяжести. Отсюда находится масса снежинки:

$$m = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ кг.}$$

Снежинка состоит из молекул воды, молярная масса которой равна  $M = 18 \text{ г/моль}$ . А в состав каждой молекулы входят три атома. В итоге количество атомов в одной снежинке можно оценить так:

$$N = 3N_A \frac{m}{M} = 3 \cdot 6 \cdot 10^{23} \frac{1,6 \cdot 10^{-7}}{18 \cdot 10^{-3}} = 1,6 \cdot 10^{19}.$$

**Ф2730.** *Пустотелый упругий шарик А имеет массу стенок  $m$  (стенки всюду одинаковой толщины). Тонкая прокладка из пенополиуретана (материал очень малой плотности) отделяет внутренние стенки полости шарика А от расположенного внутри этой полости второго шарика В массой  $m/2$ . Этот «комбинированный» шарик падает с высоты  $h$  (без начальной скорости) на жесткую горизонтальную поверхность. Удар шарика А с этой поверхностью абсолютно упругий. На какую высоту после удара взлетит «комбинированный» шарик?*

Перед ударом о поверхность «комбинированный» шарик имеет скорость  $v = \sqrt{2gh}$ . Сразу после удара шарика А суммарный импульс «комбинированного» шарика на-

<sup>1</sup> Автор решений задач Ф2729–Ф2732 – С.Варламов.

правлен вверх и равен  $v^* (m - m/2)$ . После установления одинаковой скорости внешнего и внутреннего шариков они движутся вверх со скоростью  $v^* = v/3$ . Поэтому высота подъема «комбинированного» шарика после удара составит  $h/9$ .

**Ф2731.** Механическая система состоит из четырех грузов с одинаковыми массами и двух идеальных блоков с неподвижными горизонтальными осями (см. рису-

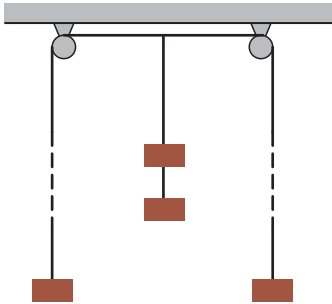


Рис. 2

нок). Нити, соединяющие грузы, идеальные (т.е. гибкие, невесомые и нерастяжимые). Участки нити, к которым прикреплены грузы слева и справа, вертикальные и очень длинные. В начальный момент все грузы неподвижны. Радиусы шкивов блоков  $R$ , расстояние между осями блоков  $L > 2R$ . С какими скоростями будут двигаться грузы через большое время после их отпускания, если левый и правый грузы до блоков еще не добрались? Сопротивление воздуха не учитывать.

В начальный момент горизонтальный участок нити между шкивами блоков имеет длину  $L$ . Когда пройдет много времени и левый и правый грузы поднимутся на высоту  $h \gg L$ , два груза, скрепленные друг с другом, опустятся на расстояние  $R + d$ . При этом суммарная длина нити сохранится:

$$R\pi + 2d - 2h - L = 0.$$

Все грузы будут двигаться с одинаковыми по величине скоростями  $v$ . Условие сохранения механической энергии имеет вид

$$\frac{4mv^2}{2} + 2mgh - 2mg(R + d) = 0.$$

Из этих двух уравнений получаем

$$2d = 2h + L - R\pi,$$

$$\frac{4mv^2}{2} + 2mgh - 2mgR - 2mgd = 0,$$

$$2v^2 + 2gh - 2gR - g(2h + L - R\pi) = 0,$$

$$v^2 - gR - \frac{g(L - R\pi)}{2} = 0,$$

$$v = \sqrt{g\left(\frac{L}{2} - R\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right)}.$$

**Ф2732.** Три непроводящих легких стержня одинаковой длины  $2R$  жестко скреплены своими средними точками так, что их концы располагаются в вершинах правильного шестиугольника. На концах каждого стержня находятся одинаковые маленькие шарики с одинаковыми массами  $m$ . Два шарика, расположенные в соседних углах шестиугольника, обладают одинаковыми электрическими зарядами  $Q$ , а остальные шарики не заряжены. Конструкция из стержней может вращаться вокруг своей вертикальной оси симметрии, т.е. шарики могут двигаться по одной и той же круговой траектории радиусом  $R$ .

У экспериментатора Васи имеется еще один длинный непроводящий стержень с таким же маленьким шариком на конце. А заряд этого шарика равен  $-Q$ . Конструкция очень медленно вращалась. Вася дождался момента и быстро разместил шарик на своем стержне в точности посередине между двумя соседними шариками конструкции. В тот момент, когда расстояния между его (неподвижным) шариком и шариками этой пары стали отличаться в два раза, Вася быстрым движением удалил свой шарик на большое расстояние от конструкции. Такую операцию Вася проделал  $N$  раз. С какой угловой скоростью вращается после этого конструкция? Трение отсутствует.

Начальная, т.е. сразу после того, как шарик с зарядом  $-Q$  оказался между шариками с зарядами  $+Q$ , потенциальная энергия взаимодействия отрицательно заряженно-

го и двух положительно заряженных шариков равна

$$E_{п1} = -4 \frac{kQ^2}{R}.$$

А в момент времени, предшествующий быстрому удалению шарика с зарядом  $-Q$  от положительно заряженных шариков, эта энергия равна

$$E_{п2} = -\frac{kQ^2}{R} \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{1} \right) = -\frac{9}{2} \frac{kQ^2}{R}.$$

Разница потенциальных энергий равна

$$E_{п2} - E_{п1} = -\frac{1}{2} \frac{kQ^2}{R}.$$

За  $N$  циклов, проведенных Васей, механическая система приобрела кинетическую энергию

$$E_{к} = -N (E_{п2} - E_{п1}),$$

или

$$6 \frac{mv^2}{2} = \frac{N}{2} \frac{kQ^2}{R}.$$

Отсюда можно найти угловую скорость вращения конструкции:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{Q}{R} \sqrt{\frac{Nk}{6Rm}}.$$

## КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

*Мы продолжаем конкурс по решению математических задач. Задания рассчитаны в основном на учащихся начиная с 8–9 классов, а более младшим школьникам советуем попробовать свои силы в конкурсе журнала «Квантик» (см. сайт kvantik.com).*

*Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com. Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь.*

*Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.*

*Задания, решения и результаты публикуются на сайте sites.google.com/view/savin-contest. Желаем успеха!*

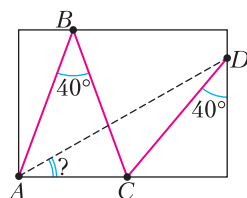
**21.** Федя увидел в спортивном магазине гантели. Каждая гантель представляла собой два одинаковых стальных диска, насаженных на стержень. У разных гантелей диски были разного диаметра, но толщина всех дисков была одна и та же и все стержни были одинаковыми. Увидев, что масса гантелей с дисками диаметра 5 см равна 5 кг, а гантелей с дисками диаметра 7 см – 7 кг, Федя удивился: это не сходилось с известной ему формулой  $\pi R^2$  для площади круга радиуса  $R$ . Разберитесь, что не учел Федя, и найдите диаметр дисков у гантелей массой 13 кг.

*О. Смирнов*

**22.** Вершины ломаной  $ABCD$  лежат на сторонах прямоугольника. Все звенья лома-

ной равны, а два отмеченных на рисунке угла равны  $40^\circ$ . Чему равен угол  $CAD$ ?

*М. Евдокимов*



**23.** Сколько существует упорядоченных троек натуральных чисел  $x \leq y \leq z$  таких, что десятичная запись числа а)  $x^2 + y^2 + z^2$ ; б)  $xy + yz + zx$  состоит из одних девяток?

*М. Евдокимов*

**24.** Каким наименьшим числом шахматных коней можно побить все 28 крайних клеток доски  $8 \times 8$ ?

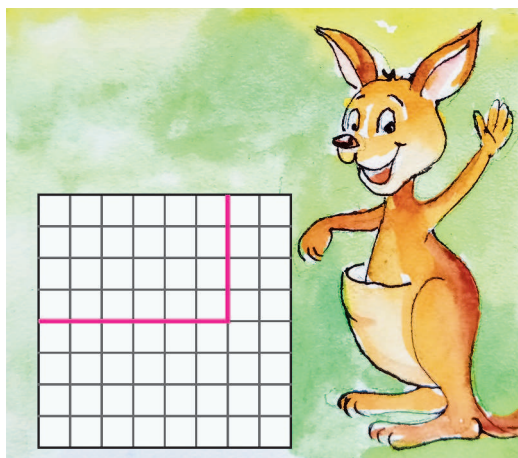
*С. Токарев*

## Задачи

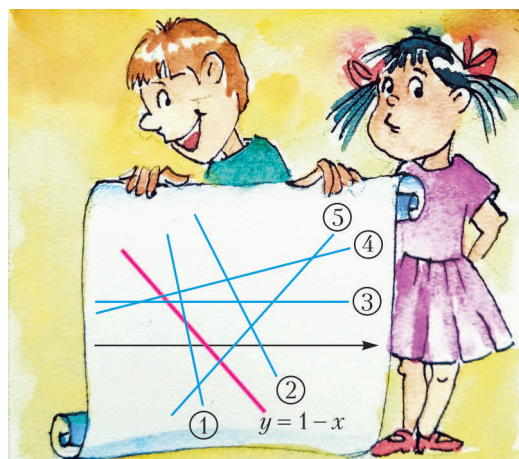
1. Аня написала число 1, затем посчитала количество букв в слове «один» и записала 4; подсчитала количество букв в слове «четыре» и записала число 6 и т.д. Какое число появится в этом ряду сотым?



2. Из 32 фигурок  $1 \times 2$  сложен квадрат  $8 \times 8$ . Смартик провел разрез (на рисунке он красный). Какое наибольшее количество фигурок могут оказаться разрезанными на две клетки?



3. На координатной плоскости нарисовали прямую  $y = 1 - x$  и еще пять прямых вида  $y = ax + b$ , потом ось  $Ox$  стерли. У какой из прямых сумма коэффициентов  $a + b$  самая большая?



4. Дима хочет вычеркнуть из числа 18724953 несколько цифр так, чтобы у оставшегося числа цифры уменьшались слева направо. Найдите наибольшее оставшееся число, которое может получиться.



Эти задачи предлагались на конкурсе «Смарт КЕНГУРУ» в 2023 году.



# Проводящий шар в однородном поле

А. ЧЕРНОУЦАН

**В** ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССМОТРИМ одну-единственную задачу – о проводящем шаре, внесенном в однородное электрическое поле. Полное решение включает в себя как вычисление распределения заряда по поверхности шара, так и определение напряженности поля в окружающем пространстве. Трудность задачи состоит в том, что распределение заряда заранее не известно, и поэтому для вычисления поля нельзя просто воспользоваться методом суперпозиции.

Для полного или хотя бы частичного решения таких задач порой используют соображения симметрии, но в большинстве случаев приходится фактически угадывать ответ. В основе всех «угадывательных» подходов лежит *теорема единственности*, смысл которой состоит в том, что хорошо угаданное решение и есть единственно правильное. Иногда удается угадать распределение зарядов на проводнике, исходя из которого вычисляется поле, иногда наоборот – сначала угадывают поле, а потом уже вычисляют распределение заряда. Самый красивый методом угадывания (или подбора) решения является известный *метод электростатических изображений*, с помощью которого решаются такие важные задачи, как проводящая плоскость или проводящий шар в поле точечного заряда.

Задача о проводящем шаре в однородном поле интересна тем, что позволяет продемонстрировать несколько подходов, в том числе соображения симметрии и метод электростатических изображений. Однако начнем мы с того, что дадим точную формулировку задачи и сразу же приведем ее ответ – тот самый, который затем будем получать различными способами и с разных сторон.

Статья была опубликована в «Кванте» №1 за 2001 год.

## Формулировка и ответ

### Формулировка:

В однородное поле с напряженностью  $\vec{E}_0$  помещают незаряженный проводящий шар радиусом  $R$ .

а) Требуется найти распределение наведенного заряда по поверхности шара. Ясно, что поверхностная плотность заряда  $\sigma$  может зависеть только от угла  $\theta$ , который образует с вектором  $\vec{E}_0$  радиус, проведенный к данной точке поверхности (рис. 1). Значит, ответ должен выражаться функцией  $\sigma(\theta)$ .

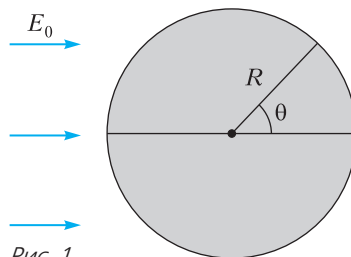


Рис. 1

б) Требуется определить поле, создаваемое этим наведенным зарядом в пространстве вне шара. Ответ должен выражаться либо функцией  $\vec{E}_{\text{нав}}(r, \theta)$ , где  $r$  – расстояние от выбранной точки до центра шара ( $r > R$ ), либо функцией  $\varphi_{\text{нав}}(r, \theta)$ , либо указанием алгоритма по их вычислению. Полная напряженность будет при этом равна  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{нав}} + \vec{E}_0$ . Заметим, что так как полная напряженность внутри шара должна быть равна нулю, наведенный заряд при  $r < R$  должен создавать напряженность  $-\vec{E}_0$ .

### Ответ:

а) Зависимость поверхностной плотности заряда от угла  $\theta$  имеет вид

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta, \quad (1)$$

где максимальная плотность  $\sigma_0$  выражается через напряженность  $E_0$ :

$$\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0 \quad (2)$$

( $\epsilon_0$  – электрическая постоянная).

б) Поле вне шара совпадает с полем *точечного диполя* с дипольным моментом

$$\vec{p} = 3V\epsilon_0 \vec{E}_0 \quad (3)$$

( $V$  – объем шара), помещенного в центр шара.

(Продолжение см. на с. 34)

*Земля нам не принадлежит; ее дали нам  
взаимы наши дети.*

Индийская пословица

*К природе надо подходить почтительно и  
неторопливо, чтобы чего-нибудь от нее до-  
биться.*

Иоганн Вольфганг Гёте

*Нельзя допустить, чтобы люди направляли  
на свое собственное уничтожение те силы  
природы, которые они сумели открыть и  
покорить.*

Фредерик Жолио-Кюри

*Человек должен осознавать себя как часть  
иерархии технологий в биосфере, где взаи-  
модействуют естественные и искусственные*

*технологии и где перед ним стоит задача –  
регуляция всей совокупности технологий в  
биосфере.*

Александр Уголев

*Мы использовали очень незначительные  
по времени экспозиции, и даже в этом случае  
мы видим, что до 96 процентов бактерий  
уничтожены УФ-излучением за 6 часов.*

Андре Шургрер

*Немалая часть астрономических наблюде-  
ний... связана с отслеживанием космического  
мусора для предупреждения землян и работ-  
ников международных космических станций.*

Владимир Сурдин

## А так ли хорошо знакомы вам ФИЗИКА + ЭКОЛОГИЯ ?

Экология ныне – целый комплекс наук, нацеленный на рациональное природопользование и охрану живых организмов. Природа за миллионы лет «научилась» преодолевать естественные перемены и катаклизмы, выработав различные способы адаптации к ним. Но человек за исторически короткий срок многократно увеличил отрицательное техногенное воздействие на окружающую среду, поставив под угрозу безопасность всей биоты. Это вклад в глобальное потепление, рост отходов производства и быта, электромагнитное загрязнение, радиоактивное заражение, замусоривание уже и ближнего космоса...

Очевидно, что без осторожного и взвешенного применения достижений самой же науки, в том числе физики, не справиться с неблагоприятными последствиями научно-технического прогресса.

Вот и во многих школьных темах мы обнаруживаем, порой неожиданно, экологическую составляющую.

### Вопросы и задачи

**1.** Сельскохозяйственные угодья на побережье Нидерландов отгорожены от океана дамбой. Почему?

**2.** Производит ли сжатый воздух, доставляемый на орбитальную станцию, давление на стенки баллона в условиях неве-

сомости? Должен ли баллон на борту станции быть таким же прочным, как и на Земле?

**3.** Отчего угарный газ (CO) быстрее проникает в организм, чем кислород?

**4.** Размеры тел у животных в холодных зонах обитания намного больше, чем у их южных сородичей (сравните, например, белых и бурых медведей). Чем это объяснить?

**5.** Почему не рекомендуется поливать растения кипяченой водой?

**6.** Весной по утрам на растениях появляется иней. Как он влияет на их температуру?


**7.** Во всех частях альпийских растений сахара накапливается больше, чем у таких же растений, находившихся в ниже лежащих зонах. С чем это связано?

**8.** Почему загрязнение атмосферы промышленными отходами приводит к уменьшению ледников на горах?

**9.** В некоторых районах городов, особенно в центре, обычно теплее, чем в пригородах. Как это истолковать?

**10.** Промышленные центры, расположенные в зоне влажного климата, сильнее загрязняют атмосферу. Почему?

**11.** Ночью над расположенными вдали городами наблюдается грязно-оранжевое свечение. Чем это обусловлено?



**12.** Выхлопные газы автомобилей вносят большой вклад в загрязнение атмосферы. Можно ли найти топливо, продукты сгорания которого будут экологически безопасны?

**13.** Почему утром или к вечеру меньше опасность получения ожогов от пребывания на солнце? Почему за стеклом не возникает загара? Почему в горах и на пляже загар появляется быстрее?

**14.** Многие растения на зиму сбрасывают листву. Каким образом они «узнают», что пришла пора облетать листве?

**15.** Какое животное способно реагировать на радиоактивное излучение?

**16.** Почему стронций-90 считается наиболее опасным радиоактивным элементом для живого организма?

**17.** Какие особенности свинца и кадмия позволяют изготовленному из них слою служить надежной защитой от проникающей радиации?

### Микроопыт

Переведите взгляд с лампы накаливания на лампу дневного света. Как изменились ваши ощущения? Почему?

### Любопытно, что...

...термин «экология» был предложен в 1866 году немецким естествоиспытателем Эрнстом Геккелем и поначалу обозначал дисциплину, которая должна была изучать отношения организмов и образуемых ими сообществ между собой и с окружающей средой.

...тепловое излучение Земли поглощается в основном водяным паром, облаками и углекислым газом. Относительная концентрация  $\text{CO}_2$  в атмосфере увеличилась настолько, что в течение 100 последних лет средняя температура Земли поднялась на полградуса.

...еще одно из неприятных последствий глобального потепления, возрастание температуры внешней среды, приводит к значительному уменьшению коэффициента полезного действия тепловых станций.

...ежегодное производство химических источников тока исчисляется многими миллиардами штук; если все их включить

одновременно, то можно получить мощность, сравнимую со всеми электростанциями мира. Их утилизация – важнейшая экологическая проблема.

...в 1967 году под эгидой ООН был подписан «Договор по космосу», который, среди прочего, определял уровень стерильности космических аппаратов для снижения рисков заражения других планет земными микроорганизмами.

...настоящим рекордсменом по чувствительности среди физических методов является нейтронный активационный анализ (НАА), позволяющий узнать не только качественно, но и количественно, сколько атомов того или иного изотопа содержится в образце. С его помощью удалось определить концентрацию токсичных элементов в байкальских губках, подтверждающую загрязнение озера тяжелыми металлами.

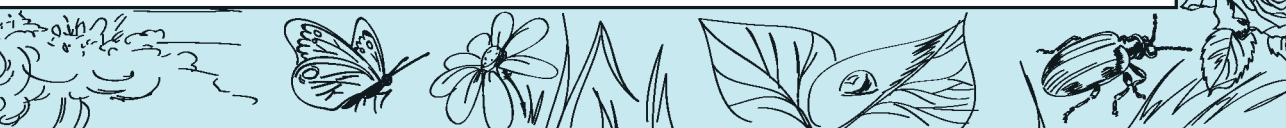
...эксперименты на ускорителях заряженных частиц служат, в том числе, для решения проблем радиационной биологии, связанных с реализацией длительных пилотируемых полетов к Луне и Марсу, а именно – оценке радиационного риска космонавтов.

...на юге Франции продолжается самая крупная стройка XXI века – возведение термоядерного реактора, воздвигающего начало освоения чистой и безопасной энергии.

### Что читать в «Кванте» о союзе физики и экологии (публикации последних лет)

1. «Активные материалы – адаптивные и защищающие» – 2016, №5-6, с.6;
2. «Астрономия вернулась в школу» – 2017, №12, с.2; 2018, №1, с.2;
3. «Ветру и солнцу навстречу» – 2019, №9, с.2;
4. «Дышите на здоровье!» – 2020, №4, с.29;
5. «Ртуть и вода – диффузия и испарение» – 2021, №1, с.42;
6. «Атмосфера Земли и современная энергетика» – 2021, №11-12, с.5;
7. «Нобелиада-21» – 2022, №2, с. 22.

Материал подготовил А. Леонович



(Начало см. на с. 31)

Если вы успели забыть (или не успели узнать), что такое диполь и что такое дипольный момент, напомним: диполем называют систему двух точечных зарядов  $q$  и  $-q$ , а дипольный момент  $\vec{p}$  такого диполя равен  $q\vec{l}$ , где  $\vec{l}$  – вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному. На большом расстоянии ( $r \gg l$ ) поле диполя определяется его дипольным моментом. Соответствующие формулы выведены в Приложении, а здесь нам осталось пояснить, что такое точечный диполь. Этот идеальный бесконечно малый объект получается предельным переходом  $l \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ , при котором величина дипольного момента  $p = ql$  остается постоянной.

### Теорема единственности

Как уже было сказано, теорема единственности является важным подспорьем для всякого, кто пытается решить какую-нибудь не очень тривиальную задачу электростатики или хочет достаточно строго обосновать какое-нибудь утверждение. Поэтому мы сочли уместным выделить отдельный параграф для ее обсуждения.

Отметим, что задачи с проводниками могут формулироваться по-разному – для каждого из проводников может быть задан или его заряд, или его потенциал. Но в любом случае существует единственное решение поставленной задачи.

Для дальнейшего удобно «заготовить» две формулировки теоремы единственности.

**Первая формулировка.** Существует единственное *распределение зарядов* по поверхности проводников, при котором напряженность поля внутри проводников равна нулю, а заряды (или потенциалы) проводников равны заданным значениям. Исходя из такого подхода решается, например, задача о распределении заряда по поверхности тонкого проводящего диска.

**Вторая формулировка.** Существует единственное *распределение напряженности поля* в пространстве вне проводников, при котором поверхности проводников оказываются эквипотенциальными, а заряды (или потенциалы) проводников равны заданным значениям. Именно такой подход (подбор правильного поля) лежит в основе метода электростатических изображений.

### Соображения симметрии

Исходя из соображений симметрии (и единственности) можно дать столь простое и изящное доказательство формулы (1), что кажется, будто она возникает «из ничего», как кролик из шляпы фокусника. Мы представим это доказательство в виде цепочки последовательных утверждений.

**Утверждение 1.** Во всех точках окружности большого круга, перпендикулярного напряженности  $\vec{E}_0$  (т.е. в точках с  $\theta = 90^\circ$ ), поверхностная плотность заряда равна нулю (рис. 2). Это следует из симметрии между положительными и отрицательными зарядами.

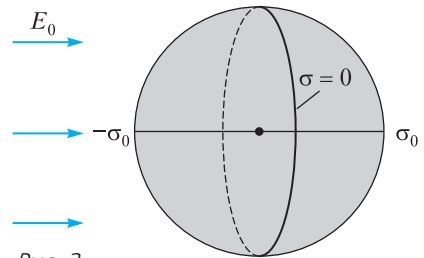


Рис. 2

**Утверждение 2.** Если при помещении шара в поле с напряженностью  $\vec{E}_1$  поверхностная плотность заряда в некоторой точке равна  $\sigma_1$ , а при помещении в поле с напряженностью  $\vec{E}_2$  она равна  $\sigma_2$ , то в поле с напряженностью  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$  поверхностная плотность заряда в этой точке будет  $\sigma_1 + \sigma_2$ . То, что поверхностные плотности, наведенные разными полями, складываются, следует из теоремы единственности: каждая поверхностная плотность уничтожит свою напряженность, и *полная напряженность* останется равной нулю, поскольку существует лишь единственное распределение заряда, удовлетворяющее этому условию.

**Утверждение 3.** Если напряженность внешнего поля увеличить в  $\alpha$  раз ( $\vec{E}' = \alpha\vec{E}$ ), то поверхностная плотность заряда в каждой точке увеличится в  $\alpha$  раз ( $\sigma' = \alpha\sigma$ ). Действительно, увеличение в  $\alpha$  раз плотности заряда приведет к увеличению в  $\alpha$  раз собственной напряженности, и полная напряженность внутри шара останется равной нулю – в дело опять вступает теорема единственности...

**Основное рассуждение.** Рассмотрим шар, помещенный в однородное поле  $\vec{E}_0$  (рис. 3). Пусть максимальная плотность наведенного заряда (при  $\theta = 0$ ) равна  $\sigma_0$ . Чтобы найти

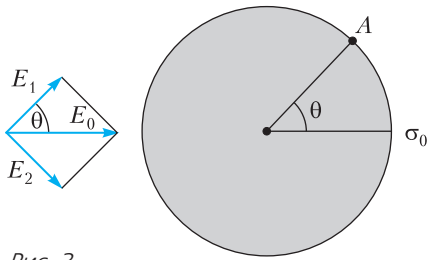


Рис. 3

$\sigma(\theta)$ , разложим  $\vec{E}_0$  на две взаимно перпендикулярные составляющие:  $\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , одна из которых ( $\vec{E}_1$ ) составляет с  $\vec{E}_0$  угол  $\theta$ . Поскольку  $E_1 = E_0 \cos \theta$ , при помещении шара в поле  $\vec{E}_1$  максимальная плотность заряда в точке  $A$  будет  $\sigma_0 \cos \theta$  (см. утверждение 3). А если поместить шар в поле  $\vec{E}_2$ , поверхностная плотность заряда в точке  $A$  будет равна нулю (см. утверждение 1). Значит, в соответствии с утверждением 2, в поле  $\vec{E}_0$  поверхностная плотность заряда в точке  $A$  будет  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ .

Конечно, такое рассуждение не позволяет сразу определить, чему равна  $\sigma_0$ . Но эта задача гораздо проще, чем задача об определении неизвестного распределения заряда. Когда распределение уже известно, можно воспользоваться принципом суперпозиции, выразить напряженность, создаваемую этим распределением в центре шара, и приравнять ее к  $E_0$ . Если вы умеете интегрировать, попробуйте таким образом получить формулу (2).

Однако задача о напряженности, создаваемой наведенными зарядами вне шара, в рамках этого подхода остается нерешенной. Два других подхода позволят нам получить более полное решение поставленной задачи.

### Метод электростатических изображений

Метод электростатических изображений позволяет не угадать распределение наведенных зарядов по поверхности, а определить создаваемое ими поле, заменив его полем воображаемых зарядов (изображений), расположенных внутри проводника. Заряды-изображения подбираются так, чтобы полное поле, создаваемое ими и внешними зарядами, имело «правильные» свойства на границе проводника. Например, если проводник по условию заземлен, то это поле должно иметь всюду на границе нулевой потенциал. Если же задан заряд проводника, то, во-первых, поверхность проводника должна быть эквипотенциальной и, во-вторых, сумма зарядов-

изображений должна быть равна заданному заряду. Поскольку существует единственное поле, удовлетворяющее таким, как их называют, «граничным условиям», то поле зарядов-изображений должно совпадать с полем наведенных зарядов проводника.

Вот несколько примеров.

**Пример 1. Точечный заряд и проводящая плоскость.** Этот пример хорошо известен многим школьникам. Если точечный заряд  $q$  поднести на расстояние  $a$  к бесконечной проводящей плоскости (рис. 4,а), то возник-

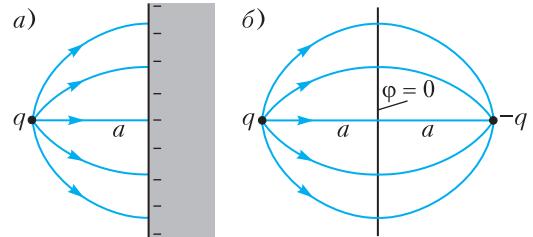


Рис. 4

кающее при этом поле совпадает с полем двух точечных зарядов (рис. 4,б): самого заряда  $q$  и заряда-изображения  $-q$ , расположенного за плоскостью симметрично заряду  $q$  (как изображение источника света в плоском зеркале). Действительно, эквипотенциальная поверхность поля двух таких зарядов с  $\varphi = 0$  совпадает с поверхностью проводника. Иначе говоря, поле, создаваемое наведенными зарядами в пустом пространстве, совпадает с полем одного точечного заряда  $-q$ .

**Пример 2. Точечный заряд и заземленный шар.** Если к заземленному шару радиусом  $R$  поднести на расстояние  $L$  от его центра ( $L > R$ ) точечный заряд  $q$  (рис. 5,а),

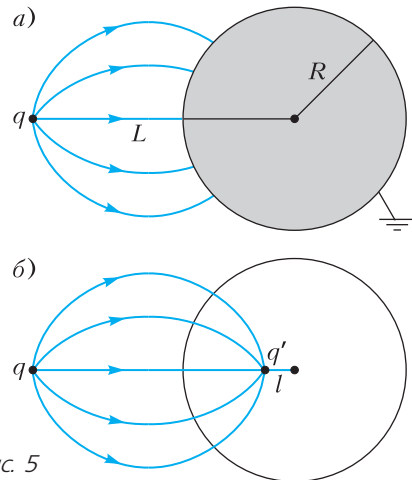


Рис. 5

то возникающее поле совпадает с полем двух точечных зарядов (рис. 5, б): самого заряда  $q$  и заряда-изображения, равного  $q' = -qR/L$  и расположенного на расстоянии  $l = R^2/L$  от центра шара.

Тожественное совпадение этих двух полей следует из утверждения, что эквипотенциальная поверхность с  $\varphi = 0$  для поля зарядов  $q$  и  $q'$  совпадает с поверхностью шара. Убедимся в этом. Возьмем произвольную точку  $A$  на поверхности шара (рис. 6) и обозначим через  $r_1$  расстояние от

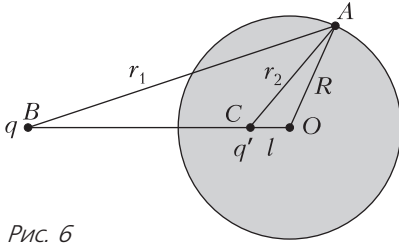


Рис. 6

нее до заряда  $q$  (точка  $B$ ), а через  $r_2$  – расстояние до заряда  $q'$  (точка  $C$ ). Поскольку  $AO : OC = R/l = L/R = BO : OA$ , треугольник  $AOC$  подобен треугольнику  $BOA$ . Значит, для любой точки  $A$  отношение  $r_1/r_2$  равно  $L/R$  и потенциал  $\varphi(A) = kq/r_1 + kq'/r_2$  равен нулю (напомним, что  $q' = -qR/L$ ).

Иначе говоря, поле, создаваемое наведенными зарядами вне шара, совпадает с полем одного точечного заряда  $q'$ .

**Пример 3. Точечный заряд и заряженный шар.** Если в условии предыдущего примера заменить заземленный шар на заряженный зарядом  $Q$ , то к заряду-изображению  $q'$  необходимо добавить второй заряд-изображение  $q'' = Q - q'$ , помещенный в центр шара.

Каким же образом можно использовать метод электростатических изображений в случае проводящего шара в однородном поле? Поскольку результат не должен зависеть от того, какая система зарядов является источником поля  $\vec{E}_0$ , будем считать, что оно создается двумя зарядами  $q$  и  $-q$  (рис. 7), расположенными симметрично относительно центра шара на большом от него расстоянии ( $L \gg R$ ). Величину зарядов надо выбрать таким образом, чтобы создаваемая ими в

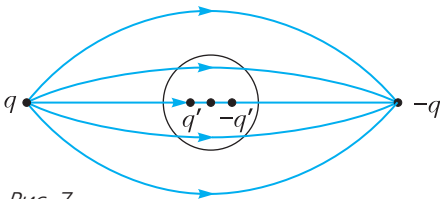


Рис. 7

центре шара напряженность была равна  $E_0$ :

$$\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 L^2} = E_0.$$

Поле наведенных зарядов в пространстве вне шара будет совпадать с полем двух точечных зарядов  $q'$  и  $-q'$ , где  $q' = -qR/L$ , расположенных на расстоянии  $l = R^2/L$  от центра. Два заряда-изображения образуют диполь с дипольным моментом, равным

$$p = q' \cdot 2l = \frac{2qR^3}{L^2} = 3V\epsilon_0 E_0,$$

что совпадает с формулой (3). Если рассмотреть предельный переход, при котором заряды удаляются на бесконечность, но одновременно их величина меняется так, что напряженность поля остается равной  $E_0$ , то поле будет стремиться к однородному, а диполь будет стремиться к точечному (при сохранении дипольного момента).

Остается ответить на вопрос: как в рамках метода электростатических изображений найти не только поле наведенных зарядов, но и их распределение по поверхности? Это можно сделать с помощью соотношения, связывающего напряженность поля у поверхности проводника с поверхностной плотностью заряда:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4)$$

Например, в случае заряда и проводящей плоскости нетрудно вычислить напряженность поля зарядов  $q$  и  $-q$  на расстоянии  $x$  от точки, лежащей посередине между ними (рис. 8), и найти поверхностную плотность зарядов:

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{qa}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

В случае шара в однородном поле надо вычислить полное поле, равное сумме однородного внешнего поля и поля точечного диполя (см. Приложение) возле поверхности сферы. Попробуйте сделать это самостоятельно.

Как убедиться в справедливости формулы (4)? Проще всего это сделать с помощью теоремы

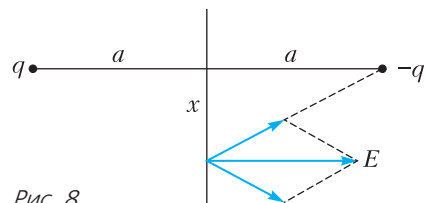


Рис. 8

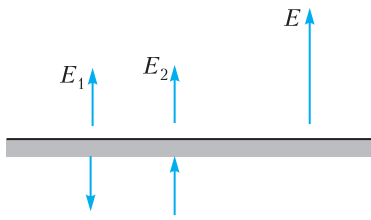


Рис. 9

Гаусса (кто с ней знаком), но можно обойтись и без нее. Представим поле вблизи поверхности в виде суперпозиции двух полей (рис. 9): поля  $\vec{E}_1$ , созданного малым близлежащим участком поверхности, которое можно считать равным полю бесконечной плоскости  $E_1 = \sigma/(2\epsilon_0)$  (в пределе, когда расстояние до поверхности мало по сравнению с размером этого участка), и поля остальных зарядов  $\vec{E}_2$ . Внутри проводника эти два поля должны сократить друг друга, поэтому  $E_2 = E_1 = \sigma/(2\epsilon_0)$ . Вне проводника эти напряженности складываются, откуда и получается формула (4).

Конечно, может возникнуть вопрос: а как (без теоремы Гаусса) получить формулу  $E = \sigma/(2\epsilon_0)$  для напряженности бесконечной равномерно заряженной плоскости, на которую опирается этот вывод? Можно сделать это, рассмотрев поле равномерно заряженной сферы, которое совпадает (вне сферы) с полем точечного заряда, а вблизи поверхности равно  $\sigma/\epsilon_0$ . Если провести такое же рассуждение, как выше, но в обратном порядке, то получим искомую формулу.

### Метод наложения шаров

Последний из рассматриваемых здесь подходов к решению задачи о проводящем шаре в однородном поле дает наиболее полное, и притом достаточно простое, ее решение. Как и раньше, мы разобьем изложение этого метода на несколько последовательных этапов, каждый из которых представляет свою интересную задачу.

**1. Равномерно заряженный шар.** Рассмотрим шар радиусом  $R$ , равномерно заряженный с объемной плотностью  $\rho$ . Напряженность поля вне шара, при  $r > R$ , совпадает с полем точечного заряда  $q = \rho V$ :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho V}{r^2}. \quad (5)$$

Внутри шара, при  $r < R$ , вклад в напряженность дают только заряды, находящиеся внутри сферы радиусом  $r$ , а вклад внешних слоев равен нулю:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0},$$

где  $q(r) = \rho \cdot 4/3\pi r^3$ . Для дальнейшего удобно записать последнюю формулу в векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}. \quad (6)$$

**2. Наложение двух шаров.** Рассмотрим два равномерно заряженных по объему шара: один с объемной плотностью  $\rho$ , другой с объемной плотностью  $-\rho$ . Пусть шары расположены так, что расстояние  $l$  между их центрами меньше суммы их радиусов, т.е. существует область их пересечения (рис. 10).

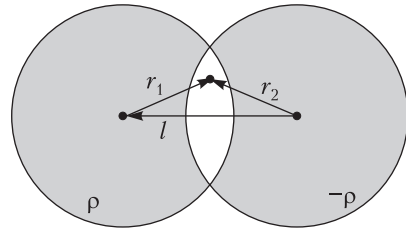


Рис. 10

Объемная плотность заряда в этой области равна нулю, а поле равно суперпозиции полей двух шаров. Выберем произвольную точку в этой области и обозначим через  $\vec{r}_1$  радиус-вектор, проведенный к этой точке из центра положительно заряженного шара, а через  $\vec{r}_2$  – радиус-вектор, проведенный из центра отрицательно заряженного шара. В соответствии с формулой (6) получаем

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0} - \frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho \vec{l}}{3\epsilon_0}, \quad (7)$$

где  $\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , – вектор, проведенный из центра отрицательно заряженного шара к центру положительно заряженного.

Мы установили, что поле в области пересечения двух разноименно заряженных (с одинаковой плотностью) шаров является однородным. Этот факт можно использовать для конструирования такого распределения зарядов по поверхности шара, которое уничтожит внешнее однородное поле. Покажем, как это сделать.

**3. Шар в однородном поле.** Рассмотрим два разноименно заряженных шара одного и того же радиуса  $R$ , центры которых смещены на малое расстояние  $l_0$  ( $l_0 \ll R$ ). Заряд получившейся системы почти всюду равен нулю, кроме двух тонких равномерно заряженных сегментов (рис. 11): одного с плот-

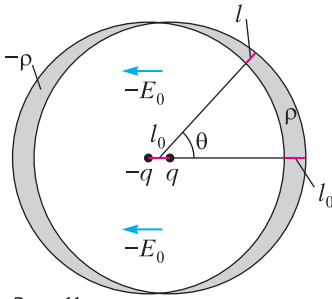


Рис. 11

ностью  $\rho$ , другого с плотностью  $-\rho$ . Толщина этих сегментов в самом толстом месте равна  $l_0$  и уменьшается с углом  $\theta$  по закону  $l = l_0 \cos \theta$ . Ясно, как перейти к поверхностному заряду: надо рассмотреть предельный переход  $l_0 \rightarrow 0$ , но при этом так менять объемную плотность заряда  $\rho$ , чтобы заряд единицы поверхности, равный  $\rho l_0$ , стремился к определенному пределу  $\sigma_0$ . Поскольку поле этих зарядов внутри полости должно уничтожить внешнее поле  $\vec{E}_0$ , в соответствии с формулой (7) получаем

$$-\frac{\rho \vec{l}_0}{3\epsilon_0} = -\vec{E}_0$$

(вектор  $\vec{l}_0$  проведен от центра отрицательного шара к центру положительного). Значит, предельное значение максимальной поверхностной плотности выражается через величину внешнего поля формулой

$$\sigma_0 = \rho l_0 \rightarrow 3\epsilon_0 E_0,$$

совпадающей с формулой (2). Зависимость от угла  $\theta$  тоже получается правильной:  $\sigma = \rho l = \rho l_0 \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta$ . Кроме того, поле вне системы двух шаров совпадает с полем двух точечных зарядов  $q = \rho V$  (см. формулу (5)) и в пределе переходит в поле точечного диполя с дипольным моментом

$$\vec{p} = q \vec{l}_0 = \rho V \vec{l}_0 \rightarrow 3V \epsilon_0 \vec{E}_0.$$

### Приложение. Поле диполя

Чтобы вычислить поле точечного диполя, можно сначала написать точное выражение для поля двух зарядов  $q$  и  $-q$ , а потом расстояние между ними устремить к нулю. Однако лучше вычислить поле конечного диполя сразу на большом расстоянии от него ( $r \gg l$ ), где поля обоих диполей совпадают.

Проще всего вычислить потенциал поля диполя. Обозначив расстояние до центра диполя через

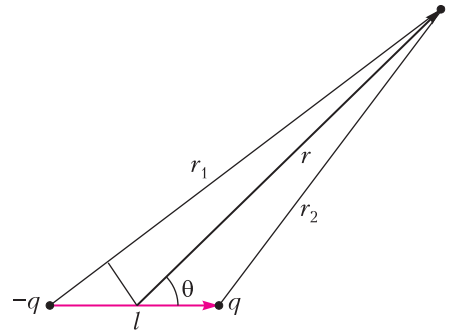


Рис. 12

$r$ , расстояние до отрицательного заряда  $r_1$ , а до положительного  $r_2$ , получим (рис. 12)

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1} \right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} - \frac{q}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{r^2}. \end{aligned}$$

Это выражение часто записывают через скалярное произведение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}, \tag{8}$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из центра диполя.

Для вычисления напряженности поля можно воспользоваться связью между напряженностью и потенциалом. Мы оставим это упражнение тем, кто уже научился уверенно дифференцировать сложные выражения, и сразу приведем ответ в векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$



# Повороты и круговые интерпретации

Е. БАКАЕВ, П. КОЖЕВНИКОВ

**Р**ЕЧЬ ПОЙДЕТ О КОМБИНАТОРНЫХ задачах, где по кругу расположены объекты, и при решении помогает рассмотрение всех возможных поворотов этого круга. Также мы рассмотрим задачи, где объекты по кругу еще не расположены – и укладка по кругу помогает решить задачу.

Эта статья в некотором смысле продолжает статью «Расстановки по кругу и арифметика остатков» из «Кванта» №9 за 2022 год, в которой основным объектом обсуждения был *круг остатков*, или *n-окружность* (т.е. окружность, разделенная на равные дуги  $n$  точками, занумерованными остатками при делении на  $n$ ).

Условия задач будем просто нумеровать: 1, 2, 3 и т.д. Если в статье задача не разбирается, то к ней дается решение в конце журнала.

## Все возможные повороты

**1** (Турнир городов, 1988/89). Даны две одинаковые шестеренки с 14 зубцами каждая. Их наложили друг на друга так, что зубцы совпали. После этого четыре пары совпадающих зубцов выпилили. Докажите, что всегда можно повернуть эти шестеренки друг относительно друга так, чтобы в местах сломанных зубцов одной шестеренки оказались целые зубцы второй шестеренки.

**Решение.** Всего есть 14 положений шестеренок – поворотов, совмещающих одну шестеренку с другой. В начальном положении совпадает четыре выпиленных пары зубцов (выпиленный зубец на первой шестеренке совпадает с выпиленным зубцом на второй). Всего таких пар  $4^2 = 16$ . Остается 12 пар, причем каждые два зубца могут совпадать только при каком-то одном положении шестеренок. Значит, в одном из 13 оставшихся положений никакая пара не совпадает.

Это решение можно изложить несколько иначе. В нижней шестеренке на месте выпиленных зубцов поместим цифры 1. Для всех поворотов верхней шестеренки относительно нижней посчитаем сумму видимых цифр. Каждая цифра 1 будет видна 4 раза, поэтому общая сумма чисел для всех поворотов будет равна  $4 \cdot 4 = 16$ . В начальном положении эта сумма равна 4. Поэтому найдется одно из 13 других положений, в котором сумма не более  $12/13$ , т.е. равна 0.

**2.** Докажите, что это неверно для шестеренок с 13 зубцами, из которых выпилили по 4 зубца.

**Решение.** Занумеруем зубцы по порядку и выпилим зубцы с номерами 1, 2, 5, 7 (рис.1). Легко проверить, что 12 разностей этих чисел дают все 12 ненулевых остатков при делении на 13:

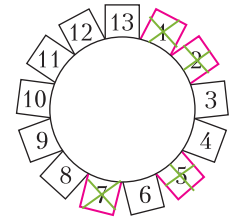


Рис. 1

$$\begin{aligned} 2 - 1 &\equiv 1, & 1 - 2 &\equiv 12, \\ 5 - 1 &\equiv 4, & 1 - 5 &\equiv 9, \\ 7 - 1 &\equiv 6, & 1 - 7 &\equiv 7, \\ 5 - 2 &\equiv 3, & 2 - 5 &\equiv 10, \\ 7 - 2 &\equiv 5, & 2 - 7 &\equiv 8, \\ 7 - 5 &\equiv 2, & 5 - 7 &\equiv 11. \end{aligned}$$

Поэтому при каждом повороте ровно одна пара выпиленных зубцов совпадает. (Например, из того, что  $7 - 1 \equiv 6$  по модулю 13, получаем, что при повороте верхней шестеренки на 6 зубцов по часовой стрелке седьмой зубец наложится на первый, т.е. при этом повороте совпадут две дырки. И так с каждым возможным поворотом.)

**3.** Даны две одинаковые шестеренки с  $n > 10$  зубцами каждая. На одной из них выпилили 10 зубцов, и на другой тоже 10 зубцов (возможно, другие). Всегда ли можно повернуть эти шестеренки друг относительно друга так, чтобы в местах выпиленных зубцов одной шестеренки оказались целые зубцы другой шестеренки?

**Ответ.** При  $n > 100$  – всегда, при остальных  $n$  – нет.

**Решение.** Всего есть  $n$  возможных поворотов одной шестеренки относительно другой, а пар выпиленных зубцов  $10^2 = 100$ . Поэтому

при  $n > 100$  найдется поворот, в котором не совпадает ни одна пара зубцов.

При  $n \leq 100$  можно выпилить зубцы так, чтобы никакая пара выпиленных зубцов не совпадала. Пронумеруем зубцы подряд: 0, 1, 2, ...,  $n - 1$ . На одной шестеренке выпилим зубцы с номерами от 0 до 9. А на другой – зубцы с номерами, кратными 10 (таких зубцов не больше 10), и, возможно, еще какие-нибудь, чтобы количество выпиленных зубцов равнялось 10. Таким образом, на первой шестеренке выпилены 10 зубцов подряд, а на второй среди 10 любых подряд идущих зубцов есть выпиленный. Поэтому при любом повороте какой-то выпиленный зубец наложится на другой выпиленный.

**4** (Московская математическая олимпиада, 1959). Два концентрических круга поделены на  $2k$  равных секторов. Каждый сектор выкрашен в белый или черный цвет. Докажите, что если белых и черных секторов на каждом круге поровну, то можно сделать такой поворот, что по крайней мере на половине длины окружности будут соприкасаться разноцветные куски.

**5.** Каждый из двух дисков разделен на 2000 равных секторов и на каждом красным цветом окрашены произвольные 200 секторов. Диски наложили друг на друга и один стали поворачивать на углы, кратные  $360^\circ/2000$ . Докажите, что существует по крайней мере 96 положений, при которых совпадает не более 20 окрашенных секторов.

**6** (К. Кноп, Турнир городов, 2018/19). Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 13 закрытых пустых шкапулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкапулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкапулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкапулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкапулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

### Равные хорды

**7** (В.Произволов, конкурс «Математика 6–8», «Квант» №1 за 1998 г.). На окружности расположены 100 точек, делящие ее на равные дуги. Десять из этих точек окрасили в

красный цвет, еще десять – в синий. Докажите, что среди хорд, соединяющих точки красного цвета, есть хотя бы одна хорда, равная по длине хотя бы одной хорде, соединяющей точки синего цвета.

**Решение.** Интересно, что эта задача решается так же, как разобранные уже задачи про шестеренки. Но про шестеренки изначально было сказано, что они крутятся, а здесь нам самим нужно догадаться рассмотреть поворот – точнее, все возможные повороты.

Представим, что есть две копии этой окружности: на одной отмечены красные точки, а на другой – синие. Пусть копия с красными точками лежит неподвижно, а копию с синими точками будем поворачивать всеми возможными 100 способами. Всего есть  $10 \cdot 10 = 100$  пар красных и синих точек. При начальном положении никакая красная точка не совпадает ни с какой синей. Поэтому при каком-то другом повороте совпадут две пары точек (в каждой паре – одна

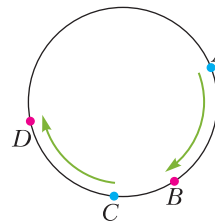


Рис. 2

красная и одна синяя точка). Значит, эти две красные точки соединяет такая же хорда, как эти две синие точки (на рисунке 2 при повороте синяя точка  $A$  переходит в красную точку  $B$ , а синяя точка  $C$  – в красную точку  $D$ ).

**8.** В условиях предыдущей задачи докажите, что найдутся две равные хорды, каждая из которых соединяет красную и синюю точки.

**9** (В.Брагин, Турнир городов, 2011/12, сложный тур, 8–9 класс). Вершины правильного 45-угольника раскрашены в три цвета, причем вершин каждого цвета поровну. Докажите, что можно выбрать по три вершины каждого цвета так, чтобы три треугольника, образованные выбранными одноцветными вершинами, были равны.

### Непрерывный случай

**10** (Ю.Лысов, вариация задачи M165). Даны две окружности, длина каждой из которых равна  $a > 100$ . На одной из них отмечено 10 точек, а на другой – несколько дуг, сумма длин которых равна 10. Докажите, что эти окружности можно совместить так, чтобы ни одна отмеченная точка не

попала на отмеченную дугу.

Эта задача является обобщением задачи 3 про шестеренку. Но в этой задаче длина окружности уже не обязательно целая, точки могут делить окружность на части с нецелыми длинами, и повороты рассматриваются тоже не только на целую длину. Тем не менее, идея решения задачи та же: надо рассмотреть все возможные повороты, хотя теперь это множество и бесконечно.

**Решение.** Рассмотрим все возможные повороты первой окружности, при которых отмеченная точка будет попадать на отмеченную дугу. Если это происходит при повороте на угол  $\alpha$  против часовой стрелки, будем называть такой угол  $\alpha$  *плохим*. Множество всех плохих углов удобно изобразить на отдельной третьей окружности, равной первым двум. Будем откладывать угол  $\alpha$  от условного нулевого направления и закрашивать на этой третьей окружности точку. Таким образом множество всех плохих углов будет изображено как множество точек на третьей окружности.

Обсудим для начала наиболее простую ситуацию: даны две совпадающие окружности, на первой окружности отмечена одна точка, а на второй окружности – одна дуга (рис. 3). Несложно понять, что множество плохих углов будет дугой – такой же дугой,

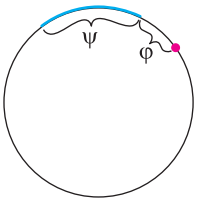


Рис. 3

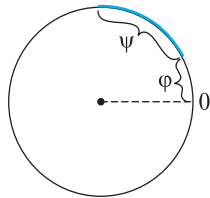


Рис. 4

как отмеченная на второй окружности, но повернутой (рис. 4).

Усложним ситуацию: пусть на первой окружности по-прежнему одна отмеченная точка, а на второй окружности – несколько дуг (рис. 5). Опять же, несложно заметить, что множество плохих дуг будет отличаться от множества дуг на второй окружности только поворотом (рис. 6). Тем самым, если суммарная длина отмеченных дуг равна  $\psi$ , то и суммарная длина дуг плохого множества углов равна  $\psi$ .

Теперь перейдем к общему случаю. На первой окружности  $n$  отмеченных точек, а на

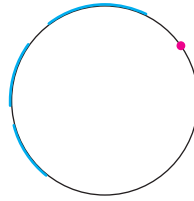


Рис. 5

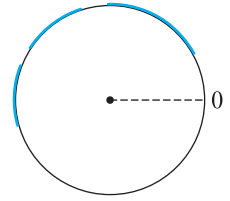


Рис. 6

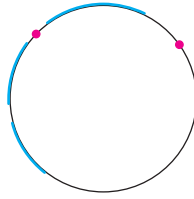


Рис. 7

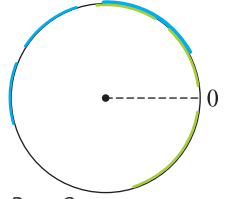


Рис. 8

второй – несколько дуг с суммарной длиной  $\psi$  (на рисунке 7 показан пример для двух отмеченных точек). Каждая из этих отмеченных точек будет порождать свое множество плохих углов. Остается объединить эти множества, чтобы получить итоговое множество плохих углов (рис. 8). Очевидно, что это объединение будет множеством дуг с суммарной длиной не больше  $n\psi$ .

В данной задаче  $n = 10$ ,  $\psi < 10$ , поэтому множество дуг будет иметь длину меньше  $10 \cdot 10 = 100$  и не будет покрывать всю окружность длины  $a > 100$ . Значит, на третьей окружности будет не отмеченная точка – т.е. найдется не плохой угол  $\alpha$ ! И при повороте на этот угол никакая отмеченная точка не попадет ни на какую отмеченную дугу.

**11.** Покажите, что утверждение предыдущей задачи неверно при  $a < 100$ .

**12** (В.Произволов, М558). В круге расположены  $k$  непересекающихся черных секторов, угол каждого из которых меньше

$\gamma = \frac{180^\circ}{k^2 - k + 1}$  (рис. 9). Докажите, что круг можно

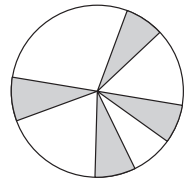


Рис. 9

повернуть вокруг центра так, чтобы все черные секторы перешли в белую часть круга.

**Решение.** Как и в решении задачи 10, рассмотрим множество плохих углов и покажем, что оно не может покрывать всю окружность.

Возьмем два различных сектора с угловыми величинами  $\alpha$  и  $\beta$ , будем поворачивать первый из них. Посмотрим, при каких пово-

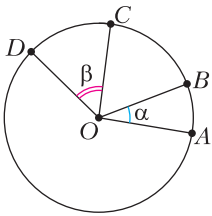


Рис. 10

ротах часть сектора  $\alpha$  накладывается на часть сектора  $\beta$ . Докажем, что эти повороты будут образовывать множество плохих углов, которое будет представлять собой дугу величины  $\alpha + \beta$ .

Для этого введем обозначения, как на рисунке 10. При угле поворота меньше  $\angle BOC$  точка  $C$  еще не будет доходить до точки  $B$ , а при угле поворота больше  $\angle AOD$  точка  $A$  «уедет» уже за точку  $D$ , и множество плохих углов будет представлять собой все углы величиной от  $\angle BOC$  до  $\angle AOD$ , т.е. дугу величиной  $\angle AOD - \angle BOC = \alpha + \beta$ .

Таким образом, каждая упорядоченная пара секторов (т.е. пара, где зафиксировано, который из двух секторов мы поворачиваем) дает множество плохих углов величины меньше  $2\gamma$ . Таких пар у нас  $k(k-1)$ , значит, они дают множество плохих углов величины меньше  $2\gamma k(k-1)$ .

Осталось рассмотреть повороты, при которых секторы накладываются сами на себя. Это повороты величины от  $-\gamma$  до  $\gamma$ , что снова дает множество углов величины меньше  $2\gamma$ .

Объединив полученные множества плохих углов, получим множество величиной меньше  $2\gamma(k(k-1)+1) = 360^\circ$ . Таким образом, снова множество всех возможных углов не покрыто целиком, т.е. найдется не плохой угол. Повернем на него, и тогда ни один сектор не наложится ни на другой сектор, ни на себя.

О существовании примеров, показывающих точность такой оценки, читайте в решении задачи М558 в «Кванте» №3 за 1980 год. Такие примеры получаются из той же дискретной конструкции, что мы рассматривали в задаче 2. Построение примеров связано с так называемыми циклическими конечными проективными плоскостями. На эту тему рекомендуем также статью С.Б.Гашкова «Разностные множества, конечные геометрии, матрицы Царанкевича и экстремальные графы» в «Математическом просвещении», сер. 3, 2017, выпуск 21.

### Уложим на окружность

А теперь приведем небольшую коллекцию задач, в которых «круговая интерпретация» может сослужить добрую службу.

**13** (В.Произволов). В кошельке лежит 50 монет на сумму 98 динар. Можно ли с уверенностью сказать, что монеты можно разделить на две равные по сумме части? (Достоинство монеты может выражаться любым натуральным количеством динар.)

*Указание.* Рассмотрите окружность длины 98, разбитую на дуги, длины которых равны достоинствам монет.

**14.** Даны натуральные  $n$  и  $k$ . В фирме работают  $n$  сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым  $k$  сотрудникам. Сможет ли он наверняка сделать все зарплаты равными, если а)  $n = 10, k = 5$ ; б)  $n = 10, k = 7$ ; в) любые  $n$  и  $k < n$ ?

*Указание.* Как можно за несколько ходов поднять зарплату конкретному работнику на рубль больше, чем всем другим?

**Решение.** а) Не сможет.

Суммарная зарплата каждый раз увеличивается на 5. В конце она должна быть кратна 10, а значит, кратна и 5. Таким образом, если изначально суммарная зарплата не делится на 5, то это невозможно.

б) Сможет.

Расположим работников по кругу. Выберем одного из них — Петю. Сначала поднимем зарплату семи подряд идущим, начиная с Пети. Затем следующим семи подряд идущим, затем следующим (рис. 11).

Рис. 11

Таким образом, мы увеличили суммарную зарплату на 21 рубль: зарплата каждого увеличилась на 2 рубля, а у Пети еще на 1 рубль больше.

в) Объединим идеи первых двух пунктов.

Пусть  $\text{НОД}(n, k) = d$ . Если  $d > 1$ , то начальник это сделать не сможет, и решение аналогично решению пункта а). В итоге суммарная зарплата должна быть кратна  $d$ , так как она должна быть кратна  $n$ . Каждый раз она увеличивается на  $k$  — число, кратное  $d$ . Значит, при делении на  $d$  остаток суммарной зарплаты не меняется. Таким образом, это сделать невозможно, если этот остаток изначально ненулевой.

Если  $d = 1$ , то начальник это сделать сможет, и решение аналогично решению пункта б). Поднимем зарплату  $k$  подряд идущим, начиная с Пети, затем следующим  $k$  подряд идущим и так далее. Так сделаем  $t$  раз, чтобы зарплата Пети увеличилась на 1 рубль больше, чем у остальных. Покажем, что такое  $t$  существует.

Требуется, чтобы  $tk$  давало остаток, равный 1, при делении на  $n$ . Рассмотрим числа  $0 \cdot k, 1 \cdot k, \dots, (n-1) \cdot k$ . Покажем, что они дают все различные остатки при делении на  $n$ . Если какие-то два из них, пусть  $ik$  и  $jk$ , дают одинаковые остатки при делении на  $n$ , то их разность  $(i-j)k$  кратна  $n$ . Раз  $n$  и  $k$  взаимно просты, то  $i-j$  кратно  $n$ , что невозможно, ведь эта разность больше 0 и меньше  $n$ . Таким образом, рассмотренные  $n$  чисел дают все различные остатки при делении на  $n$ , тогда одно из них дает остаток 1.

**15** (К.Сибиряков, М463). Натуральные числа  $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$  таковы, что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n < mn.$$

Докажите, что можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы равенство осталось верным.

**Решение.** В решении, опубликованном в «Задачнике «Кванта», использовалась не тривиальным образом индукция. Мы поступим другим образом: нарисуем окружность длины  $N = x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ , разделенную точками на  $N$  равных дуг. Далее из этих точек отметим  $m$  точек красным так, чтобы они разделили окружность на дуги длины  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Аналогично, из этих  $N$  точек отметим  $n$  точек синим так, чтобы они разделили окружность на дуги длины  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Далее решение аналогично решению задачи 7. Выделим  $mn$  дуг, начинающихся в красной точке, идущих по часовой стрелке и заканчивающихся в синей точке. Длина такой дуги может быть равна 0 (если красная точка совпадает с синей), 1, 2, ...,  $N-1$ . Так как  $mn > N$ , то хотя бы две выделенные дуги  $k_1s_1$  и  $k_2s_2$  окажутся равными по длине. Но это означает, что дуги  $k_1k_2$  и  $s_1s_2$  (идущие по часовой стрелке) равны по длине. Дуги длин  $x_i$ , оказавшиеся внутри дуги  $k_1k_2$ , и дуги длин  $y_j$ , оказавшиеся внутри дуги  $s_1s_2$ , и образуют те равные группы слагаемых, которые можно вычеркнуть в

равенстве  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$ , чтобы оно осталось верным.

**16** (Л.Курляндчик, М1267). Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – некоторая перестановка первых  $n$  натуральных чисел ( $n \geq 3$ ),  $r_k$  – остаток от деления  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$  на  $n$ . Докажите, что среди чисел  $r_1, r_2, \dots, r_n$  по крайней мере  $\sqrt{n}$  различных.

**Указание.** Покрасим на круге остатков остатки  $r_i$ . Тогда кузнечик, выполняющий прыжки различных длин  $a_2, \dots, a_n$ , должен прыгать с покрашенной вершины на другую покрашенную. Если покрашенных вершин не так много, то и возможных прыжков не так много – можно оценить их количество.

**Решение.** Случай  $n = 3$  проверяется непосредственно. Далее считаем, что  $n \geq 4$ . Можем вычеркнуть из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  число  $n$  (это не изменит множества остатков  $r_k$ ) и считать, что  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  – некоторая перестановка чисел  $1, 2, \dots, n-1$ .

Рассмотрим окружность длины  $n$ , разбитую  $n$  точками на дуги единичной длины. Занумеруем точки остатками при делении на  $n$ :  $0, 1, 2, \dots, n-1$  – в порядке следования по часовой стрелке. Покрасим все точки, соответствующие остаткам  $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ . Предположим, что количество покрашенных точек равно  $m < \sqrt{n}$ . Каждому числу  $a_k, k = 2, 3, \dots, n-1$  поставим в соответствие прыжок с одной покрашенной точки  $r_{k-1}$  на другую покрашенную точку  $r_k$  – это прыжок длины  $a_k$  по часовой стрелке. Так как длины наших прыжков различны (т.е. остатки чисел  $a_2, \dots, a_{n-1}$  при делении на  $n$  различны), то каждой упорядоченной паре покрашенных точек соответствует не более одного из  $n-2$  чисел  $a_k$  ( $k = 2, 3, \dots, n-1$ ). Количество упорядоченных пар покрашенных точек равно  $m(m-1)$ . Отсюда  $m(m-1) \geq n-2$ . С другой стороны,  $m(m-1) < \sqrt{n}(\sqrt{n}-1) = n - \sqrt{n}$ . Получаем  $\sqrt{n} < 2$ , что неверно. Противоречие.

**17.** Пусть  $p \geq 3$  – простое число. Найдите количество подмножеств  $A$  множества  $\{1, 2, \dots, p\}$  таких, что сумма элементов из  $A$  делится на  $p$ .

**Указание.** Для каждого такого подмножества  $A$ , не совпадающего с множеством  $\{1, 2, \dots, p\}$ , отметим соответствующие точки на  $p$ -окружности. Какие остатки при

деления на  $p$  будут давать суммы чисел в множествах, получаемых из  $A$  поворотами?

**Решение.** Ясно, что вместо множества  $\{1, 2, \dots, p\}$  можно рассматривать множество  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  остатков при делении на  $p$ . Рассмотрим окружность длины  $p$ , разбитую  $p$  точками на дуги единичной длины. Занумеруем точки остатками при делении на  $p$ :  $0, 1, \dots, p-1$  – в порядке следования по часовой стрелке. Пусть  $A_0$  – некоторое  $m$ -элементное подмножество этих  $p$  точек,  $1 \leq m \leq p-1$ . Вместе с  $A_0$  рассмотрим подмножества точек  $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ , получаемые из  $A_0$  поворотами на  $1, \dots, p-1$  единичных дуг. Если  $S_0$  – сумма остатков, соответствующих подмножеству  $A_0$ , то сумма остатков  $S_1$ , соответствующих подмножеству  $A_1$ , равна  $S_0 + m$  (по модулю  $p$ ), аналогично,  $S_2$  равно  $S_0 + 2m$  и т.д. Поскольку  $m$  взаимно просто с  $p$  (так как  $p$  простое и  $1 \leq m \leq p-1$ ), то  $p$  чисел  $0 \cdot m, 1 \cdot m, \dots, (p-1)m$  дают  $p$  разных остатков при делении на  $p$ , поэтому остатки сумм  $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$  при делении на  $p$  различны (в частности, отсюда ясно, что все множества  $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$  различны), и в группе из  $p$  множеств  $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$  совмещаемых поворотами, ровно для одного множества сумма остатков кратна  $p$ .

Остается заметить, что все подмножества множества  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ , за исключением пустого множества и самого множества  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ , разбиваются на группы из  $p$  подмножеств, совмещаемых поворотом. Таких групп  $(2^p - 2)/p$ . Так как для самого множества  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  сумма остатков  $0 + 1 + 2 + \dots + (p-1) = p(p-1)/2$  делится на  $p$  (так как  $p$  нечетно), получаем ответ:  $1 + (2^p - 2)/p$ .

**18.** Даны  $n$  целых чисел, взаимно простых с  $n$ . Докажите, что для любого  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  можно выбрать несколько из данных чисел, сумма которых дает остаток  $t$  при делении на  $n$ .

*Указание.* Чтобы решить задачу, можно доказать следующее более общее утверждение. Дано множество  $K$  из  $k$  целых чисел, взаимно простых с  $n$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Тогда существуют  $k$  подмножеств множества  $K$ , суммы элементов в которых дают различные остатки от деления на  $n$ .

Отметим, что данная задача – родственник следующей классической задачи: *докажите, что из любых  $n$  целых чисел можно выбрать*

*несколько, сумма которых делится на  $n$ .*

**Решение.** Докажем индукцией по  $k$  следующее утверждение для  $k = 1, 2, \dots, n$ . Дано множество  $K$  из  $k$  целых чисел, взаимно простых с  $n$ . Тогда существуют  $k$  подмножеств множества  $K$ , суммы элементов в которых дают различные остатки от деления на  $n$ .

База индукции  $k = 1$  очевидна. Сделаем переход  $k \rightarrow k+1$  (для  $1 \leq k \leq n-1$ ). Пусть  $a_1, \dots, a_k$  и  $a_{k+1} = m$  – данные  $k+1$  чисел, взаимно простых с  $n$ . По предположению индукции, можно набрать  $k$  сумм  $S_1, S_2, \dots, S_k$  некоторых из чисел  $a_1, \dots, a_k$ , дающих разные остатки при делении на  $n$ . Покрасим  $k$  точек, соответствующих этим  $k$  суммам, на круге остатков (как обычно, мы нумеруем точки, делящие окружности на  $n$  единичных дуг, остатками при делении на  $n$ :  $0, 1, 2, \dots, n-1$ ). Рассмотрим теперь следующие суммы с участием  $(k+1)$ -го числа:  $S_1 + m, S_2 + m, \dots, S_k + m$ . Если какой-то из остатков сумм  $S_1 + m, S_2 + m, \dots, S_k + m$  не покрашен, то мы набрали  $(k+1)$ -ю сумму, дающую новый остаток по сравнению с суммами  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , тем самым выполнен переход индукции. Иначе каждая покрашенная точка после поворота круга на  $m$  единиц переходит снова в покрашенную точку. Но тогда, стартуя с какой-то покрашенной точки, например с  $S_1$ , мы получаем, что все точки, соответствующие суммам  $S_1, S_1 + m, S_1 + 2m, \dots, S_1 + (n-1)m$ , покрашенные. Так как  $m$  и  $n$  взаимно просты,  $n$  чисел  $0 \cdot m, 1 \cdot m, \dots, (n-1)m$  дают  $n$  разных остатков при делении на  $n$ , значит, мы получили, что все  $n$  точек покрашенные, т.е.  $k = n$ . Противоречие.

### Снова о хордах

Приведем напоследок еще четыре довольно сложных задачи В.Произволова о хордах в круге.

**19** (В.Произволов). На окружности  $2n$  точек делят ее на  $2n$  равных дуг. Из этих точек  $n$  синие, а остальные  $n$  красные. Докажите, что сумма длин всевозможных хорд с синими концами равна сумме длин всевозможных хорд с красными концами.

**Решение.** Докажем, что для любого  $l$  количество хорд длины  $l$ , оба конца которых красные, равно количеству хорд длины  $l$ , оба конца которых синие. Повернем окружность на такой угол, чтобы расстояние меж-

ду каждой точкой и ее образом при повороте было равно  $l$ . Пусть при этом ровно  $k$  синих точек перешли в синие. Тогда остальные  $n - k$  синих точек перейдут в красные, значит, остальные  $k$  точек, которые перейдут в красные точки, красные. Таким образом, есть ровно  $k$  дуг длины  $l$ , оба конца которых красные, и столько же дуг, оба конца которых синие. Раз это верно для любого  $l$ , то суммарная длина дуг с синими концами равна суммарной длине дуг с красными концами.

**20** (В.Произволов, Турнир городов, 2002/03). Вершины 50-угольника делят окружность на 50 дуг, длины которых равны 1, 2, 3, ..., 50 в некотором порядке. Известно,

что каждая пара «противоположных» дуг (соответствующих противоположным сторонам 50-угольника) отличается по длине на 25. Докажите, что у 50-угольника найдутся две параллельные стороны.

**21** (В.Произволов, М1939). Вершины 50 прямоугольников разделили окружность на 200 равных дуг. Докажите, что среди прямоугольников найдутся два равных.

**22** (В.Произволов, М2253). 100 красных точек разделили синюю окружность на 100 дуг, длины которых являются всеми натуральными числами от 1 до 100 в произвольном порядке. Докажите, что существуют две перпендикулярные хорды с красными концами.

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Кривая через ТОЧКИ

Л.АШКИНАЗИ

Пусть в ходе эксперимента при двух значениях  $x_1$  и  $x_2$  некоего параметра  $x$  получены два значения  $y_1$  и  $y_2$  функции  $y$ . Например, при двух значениях тока  $I$ , протекающего через некое сопротивление, на нем оказываются два значения напряжения  $U$ . Если бы вы знали, какая бездна вопросов начинается с этих четырех цифр, вы бы в ужасе бросили читать и убежали прочь. Но поскольку вы не убежали, то вот и задача – постройте зависимость  $y(x)$ .

В такой постановке задачу решить нельзя – у нее бесконечно много решений (рис. 1). Школьник, скорее всего, изобразит в некотором смысле простейшее

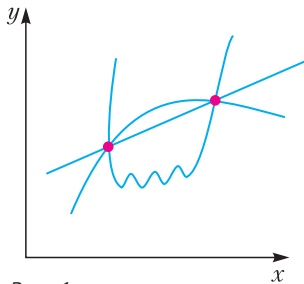


Рис. 1

решение – линейную функцию. Тут самое время поинтересоваться, чему у него будет равно  $y(x = 0)$ . И если оно окажется не равно нулю, то как бы к этому отнесся уважаемый Георг Ом (1789–1854) – с учетом того, что у нас это не какие-то  $x$  и  $y$ , а конкретно  $I$  и  $U$  (рис. 2)?

Впрочем, с нами могли поступить и интереснее – изобразить одну точку, задать вопрос и посмотреть, догадаемся ли мы использовать в качестве второй точки начало координат (рис. 3).

Что же касается прямой, не проходящей через ноль, то у нас есть три выхода. Можно спросить, с какой погрешностью измерены значения. Другой вариант – сказать, что у нас нелинейное сопротивление. И, наконец, заявить, что это не простое сопротивление, даже не нелиней-

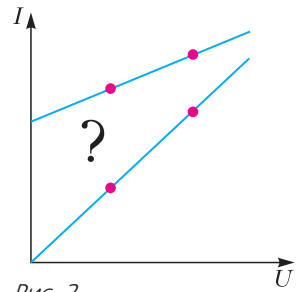


Рис. 2

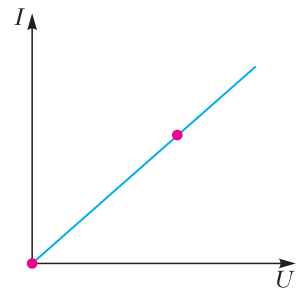


Рис. 3

ное, а волшебное, т.е. линейное, но с вмонтированной внутрь него маленькой батарейкой или аккумулятором.

С последнего варианта – как самого простого – и начнем. Нарисуем схему, в которой к источнику напряжения подключено не простое и честное сопротивление, а волшебное – коробочка, внутри которой находятся последовательно соединенные обычное честное линейное сопротивление и другой источник ЭДС с напряжением  $U_x$  (рис. 4). Вы

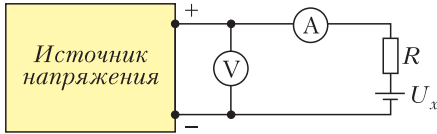


Рис. 4

можете, не решая уравнений, утверждать, что проблема решена – наклон графика зависимости  $I(U)$ , который определяется величиной  $R$ , остался тем же, а изменение величины  $U_x$  позволяет перемещать график параллельно самому себе. Но экзаменатор, скорее всего, захочет уравнений. Ну, так напишите их прямо сейчас и получите выражения для  $R$  и  $U_x$  через  $U_1, U_2, I_1, I_2$  (рис. 5).

$$\begin{cases} I_1 = \frac{U_1 - U_x}{R} \\ I_2 = \frac{U_2 - U_x}{R} \\ I(U=0) = \frac{U_x}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{U_2 - U_1}{I_2 - I_1} \\ U_x = \frac{I_1 U_2 - I_2 U_1}{I_1 - I_2} \end{cases}$$

Рис. 5

Пусть экзаменатор обрадуется вашему волшебному сопротивлению.

Но тут есть опасность, и, кстати, при общении с умным экзаменатором она есть всегда. Экзаменатор, которому понравится ваша идея волшебного сопротивления, может предложить другой вариант этого чуда – не последовательно, а параллельно соединенные дополнительный источник ЭДС и обычное сопротивление. Рассмотрите этот вариант сами.

Теперь обратимся к более традиционному случаю – к нелинейному сопротивлению. В школьном курсе такие сопротивления упоминаются, иногда даже приводятся примеры. Это и полупроводниковый диод, и вакуумный диод, и газовый разряд. Поскольку

теорий этих приборов в школьном курсе нет, то сказать, можно ли через три заданные точки, т.е.  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (0, y(0))$ , провести вольт-амперную характеристику какого-то из этих приборов, в этой статье было бы трудно. Но есть промежуточная, вполне школьная задача – вам дают вольт-амперную характеристику какого-то нелинейного сопротивления и предлагают из него и обычных линейных сопротивлений скомбинировать схему и получить вольт-амперную характеристику, проходящую через эти три заданные точки. Кстати, вы можете рассмотреть эту задачу, если в качестве нелинейного элемента вам дали идеализированный полупроводниковый диод. Подсказка: посмотрите, какие вольт-амперные характеристики вы можете получить, соединяя диод и сопротивление последовательно и параллельно.

Что касается нелинейных сопротивлений, полезно понимать еще вот что. Нелинейность сопротивления, т.е. его неподчинение закону Ома, может быть нескольких типов. Например, она может быть связана со свойствами самой среды, по которой протекает ток, – это случай полупроводникового диода. Но возможна и другая ситуация – нелинейность может быть связана тоже со свойствами среды, однако зависящими от наличия и величины протекающего по ней тока. Это случай газового разряда, вакуумного прибора, иногда – полупроводника, диэлектрика и даже просто металла! Для газового разряда ситуация такова: когда нет тока, то среда – это почти диэлектрик, т.е. почти просто газ. В вакууме, если нет тока, так вообще почти ничего нет – это вакуум! В полупроводнике и диэлектрике при некоторых условиях возможно увеличение количества свободных электронов, которые могут переносить заряд. А проще всего обстоит дело в металле, как учат нас Джоуль и Ленц, – металл нагревается током, и его сопротивление растет. Среда изменяется под воздействием тока.

Еще одна ситуация: ток может и не менять свойства среды, но его магнитное поле может сжимать его самого к оси проводника. При этом сечение, по которому протекает большая часть тока, уменьшается, а сопротивление (вы ведь помните, что  $R = \rho L/S$ ) растет. Этот эффект более заметен в полупроводни-



ках, а уж в газовом разряде вы все его видели. Именно поэтому молния – относительно тонкая, т.е. диаметр канала разряда много меньше длины молнии.

Ну и последний вариант, самый для вас загадочный. С ростом частоты ток прижимается к поверхности – это скин-эффект (англ. skin – кожа). Если кто-то из вас потрошил телевизионный кабель, то мог задуматься – почему поверхности посеребрены? Кстати, там дело не только в том, что сопротивление серебра меньше, чем у меди (обычно в книжках пишут именно об этом), ситуация хитрее. Сопротивление серебра отличается от меди незначительно, причем если серебряное покрытие нанесено гальванически, то его сопротивление может быть немного больше и вообще может оказаться не меньше, чем у меди. С медью проблема в том, что она окисляется на воздухе, ее соединения оказываются полупроводниками, а они поглощают электромагнитные волны. Кстати, на заре электроники соединения меди вообще использовали как материал для полупроводниковых диодов – так называемые купроксные выпрямители (рис. 6).

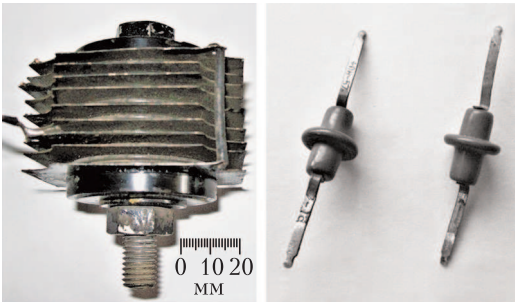


Рис. 6

Однако самый простой и самый «школьный» ответ на вопрос о двух точках и о предложении провести что-то через них, это спросить насчет погрешностей. Так что поговорим о погрешностях.

Иногда говорят, что в физике все величины определяются с какой-то погрешностью, но это не так. Есть величины, которые могут быть определены точно. Например, это некоторые величины, которые могут принимать лишь конечное количество значений. Хотя и тут все не просто – например, после приведенного в единицах СИ значения скорости света написано просто и ясно «точно». Но это немного другой, метрологический вопрос

(о нем хорошо рассказано, например, тут: <https://habr.com/ru/post/407675/>).

Могут быть определены точно и величины, которые имеют бесконечное количество значений – например, если это целые числа. Скажем, количество чего-то дискретного, например контрольных в полугодии или баллов на ЕГЭ. Правда, в физике нет чего-либо бесконечного, даже количества электронов во Вселенной, но не будем о страшном. А вот забавный вопрос – всегда ли можно точно определить величину, которая может принимать как целые числа бесконечное, но счетное множество значений? Оказывается, нет. Пусть некая величина может принимать значения 0 (ноль) и все значения  $1/n$ , где  $n$  – целое. У этой величины бесконечно много значений, которые она может принимать точно, но есть одно, которое она точно принять не может! Вы, наверное, уже догадались, какое, поняли, почему, и можете это доказать. Перейдем, однако, к более физическим ситуациям.

В школьной физике, да и вообще в метрологии, когда речь заходит о точности, пишут, например, что напряжение равно  $10 \pm 0,1$  В. Это означает, что некая величина лежит между 9,9 В и 10,1 В, причем равновероятно в любом месте этого отрезка, и не может лежать вне него. В реальной жизни это не так. Случайные погрешности обычно подчиняются так называемому нормальному распределению – чем ближе к краям указанного в конкретном случае отрезка, тем они более редки, вне него, они, естественно, еще более редки, но вовсе не исчезают. Тем не менее, пределы погрешностей во многих случаях (а в технике и инженерии почти всегда) указывают именно так – для простоты. Соответственно, так сделано и в экзаменационных задачах. Поэтому возникает вопрос: как провести прямую через две точки, если указаны не только точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , но и погрешности, причем их величины  $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta x_2, \Delta y_2$  все могут быть разными?

Ответ прост – нарисуйте на клетчатой бумаге эти точки с их погрешностями, и вы увидите ответ (рис. 7). Но при попытке его записать возникнет небольшая проблема. Описание множества прямых вам хотелось бы получить в виде  $y = ax + b$  и пределов на  $a$  и  $b$ , т.е.  $a_1 < a < a_2$  и  $b_1 < b < b_2$ , но таким

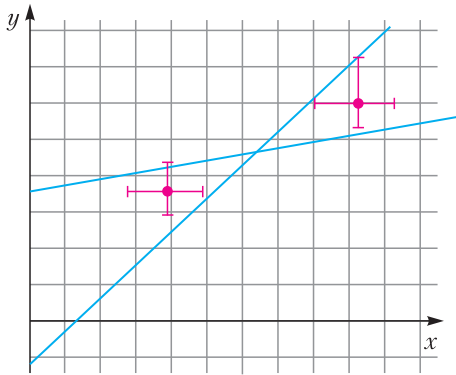


Рис. 7

простым ответом вы не обойдетесь. Пределы окажутся связаны, т.е. на плоскости  $(a, b)$  область допустимых значений  $a$  и  $b$  окажется не прямоугольной.

Впрочем, для двух точек вы выкрутитесь, записав семейство прямых в некотором виде, который подскажет вам ваш собственный рисунок. А вот если точек несколько, хотя бы три, этот фокус не пройдет. Это уже тема для небольшого исследования и, может быть, написания компьютерной программы. Поэтому остановимся, переведем дух и посмотрим на вопрос с несколько другой, более фундаментальной стороны. Почему мы вообще взялись проводить прямую? В учебной задаче – потому, что задача так сформулирована. А в реальной жизни?

В реальной жизни физик, увидев, как кто-то проводит что-то (не важно, что) через две точки, улыбнется и посоветует получить хотя бы еще десяток или лучше несколько десятков точек. Но эксперимент может быть сложен и дорог и количество экспериментальных данных так или иначе ограниченным, а главное – все-таки, какую кривую проводить? Самая естественная ситуация – когда есть какая-то теория и надо ее проверить либо есть несколько теорий и надо выбрать из них ту, которая лучше согласуется с экспериментом. Тут все ясно – проводим ту кривую, которую предсказывает теория, или те кривые, которые предсказывают разные теории, и смотрим, согласуются ли они с экспериментом и какая согласуется лучше.

Распространенная ситуация – когда в теории есть некоторый параметр, значения которого мы не знаем. Но имея экспериментальные данные, мы можем подобрать такое значение этого параметра, что точки лягут на

соответствующую кривую. Впрочем, бывает и так, что ни при каком значении они не лягутся. Тогда надо либо искать ошибку в измерениях (впрочем, это всегда не вредно сделать), либо идти к теоретикам за другой теорией. Впрочем, можно и самому о ней подумать.

А если теории, на которую точки лягутся хорошо, все-таки нет и данные надежны? Хотя мы говорим о науке, но бывают ситуации, когда нам теория, собственно говоря, и не нужна, нам только нужен простой и компактный способ хранения данных. Про обработку данных мы поговорим немного позже, но для хранения и использования есть простой, но не очень физичный способ. Берем любую функцию (как правило, берут полином) и подбираем коэффициенты так, чтобы кривая прошла во всем исследованном диапазоне через наши экспериментальные точки, точнее – через поля ошибок, которые около этих точек показаны. А если нас интересует именно физический смысл?

Бывает, что теория, упрощенная и приближенная, но хоть какая-то есть. Тогда смотрят, как наши точки отклоняются от этой примитивной теории. Например, может оказаться, что согласование хорошее при малых значениях аргумента и плохое при больших, или наоборот, или расхождения возникают именно в какой-то узкой области. Все это может оказаться важным для уточнения теории. Еще интереснее, если отклонения сами зависят от какого-то параметра, например от времени. Что вы скажете, если отклонения от закона Ома будут возникать при больших токах и нарастать со временем? Ясное дело, прямая дорога в объятия Джоуля и Ленца.

Иногда можно сказать, что эта задача похожа на такие-то или что этот процесс похож на такие-то, и тогда, наверное, решением будет комбинация экспонент, или синусоид, или... Но такие рассуждения требуют наличия опыта – и вообще накопленного в физике, и имеющегося у того, кто смотрит на точки и размышляет, что с ними делать. Кроме того, опыт может и подвести, всякое бывает. Как сформулировал Айзек Азимов, «Самая волнующая фраза, которую можно услышать в науке, – вовсе не “эврика”, а “вот это забавно”».

Теперь обратимся к обработке данных и получению самих этих точек, о которых шла

речь. Начнем с понятий «интерполяция» и «экстраполяция». Вам наверняка придется с ними встретиться в учебе и работе, так почему бы не сейчас? Итак, вы делаете некий эксперимент и получаете, среди прочего, нашу знаменитую четверку –  $x_1, y_1, x_2, y_2$ . Других данных у вас нет и получить вы их не можете, а вам потребовалось значение  $y$  для некоего  $x$ , причем такого, что  $x_1 < x < x_2$ . Так вот, нахождение  $y$  называется интерполяцией. Понятно, что найти его вы не можете, однако все это как-то делают. Простейший вариант – провести прямую линию от точки  $(x_1, y_1)$  до точки  $(x_2, y_2)$  и... вы все поняли. Способ так и называется – линейная интерполяция. Существуют и другие варианты – например, можно интерполировать куском полинома, оговорив не только сами точки, но и производные в этих точках.

С точки зрения физики, нам важно знать хоть что-то о всей функции  $y(x)$  – ну, скажем, о максимальном значении ее производной, грубо говоря, насколько она гладкая. Ибо если этой функции свойственны короткие выбросы длиной  $\Delta x$ , а у нас  $x_2 - x_1 \gg \Delta x$ , то в нашей линейной интерполяции нет смысла – на интервале от  $x_1$  до  $x_2$  она успеет напрыгаться. Иными словами, и тут, для того чтобы действовать разумно, нам нужно что-то знать об этом классе задач вообще и об этой функции, с которой мы общаемся, в частности. Например, мы можем видеть ее поведение на больших интервалах, во многих точках. И рассуждать примерно так – ну, раз она там гладкая, так, наверное, и здесь тоже гладкая. Но мы можем и ошибиться. В физике, да и в любой науке, это бывает.

Экстраполяция – это почти то же самое, но теперь  $x$  лежит не между  $x_1$  и  $x_2$ , а снаружи. Это значит, что мы что-то исследуем, добрались до каких-то значений аргумента, дальше техника не позволяет, а очень хочется. Вот тут надо быть особенно осторожным – по психологическим причинам. Раньше у нас были по бокам все-таки  $x_1$  и  $x_2$ , а теперь с одного бока свобода! По опыту автора, самая распространенная ошибка – экстраполяция в область низких температур данных, полученных при высоких температурах. Дело в том, что с ростом температуры множество процессов ускоряется (об этом рассказывается, например, в статье А.Митрофанова

«Время жизни шипучей таблетки в стакане воды» в «Кванте» №9 за 2021 г.) и их можно изучить за разумное время. Но экстраполировать данные, полученные при высоких температурах, в область низких температур не всегда удается. Уравнение-то соблюдается, но при изменении температуры начинает доминировать другой процесс, с другой энергией активации. Так что и здесь необходимо более общее знание, более глубокое представление о процессах.

Ну, и в заключение обратимся к тому, с чего начали, – к самим точкам. Много ли их надо? Сколько раз надо производить измерения? На этот вопрос нет общего и надежного ответа. Иногда говорят, что любую величину нужно измерять три раза. На самом деле это не так, необходимое количество измерений зависит от того, что мы измеряем и что мы об этом уже знаем, зачем мы измеряем, какая точность и надежность нам нужна, а также от стоимости и трудоемкости измерений. Например, если вы проверяете батарейку, вынутую из фонарика, который стал плохо светить, и прибор показывает напряжение заметно меньше нормы, вряд ли вы будете повторять замер и уж точно не будете делать три замера. А вот если он покажет норму, вы удивитесь и наверняка проверите (а потом проверите напряжение при работе на нагрузку – подумайте, почему). Многократные измерения продельваются, если заметны случайные ошибки и вы хотите усреднением поднять точность. Но в этом случае может быть полезнее подумать, откуда они взялись и не лежат ли рядом с ними ошибки систематические, от которых не спасет усреднение. А вот понимание, что, как и почему вы измеряете, может и спасти.

Так что удачных измерений, надежных интерполяций, осторожных экстраполяций и осмысленных проведений кривых через точки!

# Муниципальный этап LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике

## 7 класс

### 1. На тренировке

Группа спортсменов точно выполняет задание тренера. Спортсмены стартуют через равные промежутки времени  $\Delta t$  и движутся друг за другом по дистанции, состоящей из трех участков, с определенной тренером постоянной скоростью на каждом участке. На первом участке скорость спортсменов 14,4 км/ч, а расстояние между соседними бегунами 8 м. На втором участке скорость спортсменов 1800 дм/мин. На третьем участке расстояние между спортсменами 10 м. Через какое время  $\Delta t$  спортсмены стартовали? Чему равна длина дистанции, если время движения на всех участках одинаковое, а длина самого короткого участка 15 м? Сколько спортсменов в группе, если в момент финиша первого последний только начинает движение по второму участку?

*А. Сеитов*

### 2. Формула приведения

С помощью пиксельного рисунка (рис. 1) определите высоту приведения  $H$ , выражен-

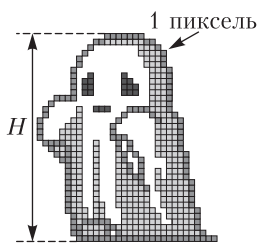


Рис. 1

ную в миллиметрах. Известно, что рисунок сделан с разрешением 300 dpi, т.е. 300 пикселей на дюйм.

*Примечание.* Пиксель – это минимальный и неделимый элемент (квадрат),

из которых состоит изображение; 1 дюйм = 2,54 см.

*Н. Вергунова*

### 3. Молчаливое масло

Кусочек масла объемом 10 мл ползет по лезвию раскаленного ножа со скоростью  $5/7$  см/с. Длина лезвия  $l = 30$  см. Масло, двигаясь вдоль лезвия, потихоньку тает с массовым расходом  $\mu = 3/14$  г/с. Плотность

масла  $900 \text{ кг/м}^3$ . Что произойдет раньше: растает масло или оно доедет до конца ножа? Определите массовый расход масла на единицу пути.

*О. Чеснокова*

### 4. Связи

В показанных на рисунках 2–5 системах в некоторый момент точки  $A$ , в результате действия приложенных к ним сил, движутся со скоростями  $v$  в указанных стрелкой на-

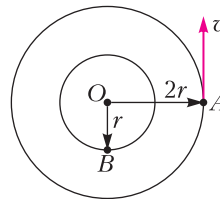


Рис. 2



Рис. 3

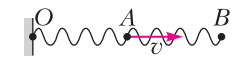


Рис. 4

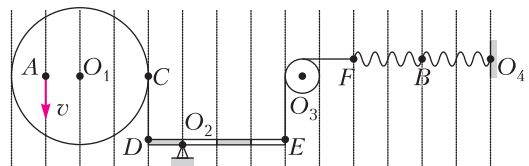


Рис. 5

правлениях. Точки  $O$  покоятся. Найдите величины и направления скоростей точек  $B$ , а также точек  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  на рисунке 5.

*Примечание.* Считайте диск, изображенный на рисунке 2, сплошным. На рисунке 4 сила приложена к точке  $B$  пружины.

*А. Сеитов*

## 8 класс

### 1. Бутылка в озере

Пустая стеклянная бутылка имеет массу  $m = 250$  г и внутренний объем  $V_0 = 0,5$  л. Бутылку заполняют доверху веществом плотностью  $\rho$ , закрывают легкой пробкой и бросают в озеро с пресной водой. Постройте график зависимости силы Архимеда  $F_A$ , действующей на бутылку в озере, от плотности  $\rho$ . Плотность стекла  $\rho_{\text{ст}} = 2500 \text{ кг/м}^3$ , плот-

ность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ Н/кг}$ .

*С.Кармазин*

## 2. Ролл

Изобретатель Бах решил намотать пленку малой толщины  $h$  без зазоров на квадратную катушку с длиной стороны  $b$ . Оцените длину пленки  $L$  и количество оборотов  $n$ , которое удалось намотать на катушку, если внешний слой пленки образовал квадрат со стороной  $a$  (рис. 6).

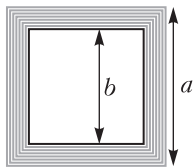


Рис. 6

В любой момент пленку можно считать натянутой, но ее растяжением пренебречь.

*В.Яворский*

## 3. Алюминиевый огурец

Алюминиевый огурец с температурой  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  поместили в калориметр, в котором находилась неизвестная жидкость при температуре  $90 \text{ }^\circ\text{C}$ , где он начал плавать. В результате в калориметре уровень жидкости поднялся на 10% и установилась температура  $60 \text{ }^\circ\text{C}$ . Определите отношение удельных теплоемкостей алюминия и неизвестной жидкости. Тепловых потерь нет, жидкость из калориметра не вытекает, теплоемкость калориметра мала.

*К.Кутелев*

## 4. Футбол со стенкой

Семиклассник Миша играет с мячом около стены. Миша с расстояния  $L = \dots$  начинает бежать со скоростью  $v = \dots$  к стоящему на удалении  $l = \dots$  от стены мячу. После удара Миши мяч катится со скоростью  $w = \dots$  к стене и, отразившись от нее, возвращается к бегущему Мише со скоростью  $u = \dots$  При встрече с мячом Миша опять сообщает ему скорость  $w$  в направлении стены и бежит дальше до следующей встречи с мячом, катящимся от стены со скоростью  $u$ . Все движения протекают вдоль прямой и заканчиваются, когда мяч прижимается Мишей к стене. Используя графики зависимости координат Миши, мяча и стены от времени (рис. 7), определите пропущенные в тексте значения названных величин. Помогите Мише определить суммарное время движения мяча к стене  $t_1$  и суммарное время движения мяча от стены  $t_2$ . Объясните, как вы нашли ответы на поставленные вопросы.

*А.Сеитов*

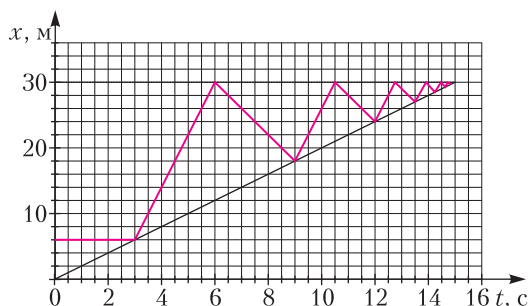


Рис. 7

## 9 класс

### 1. Затормозил

Автомобиль начинает движение из состояния покоя с постоянным ускорением  $a_1$ . Через некоторое время водитель начинает замедляться до полной остановки с постоянным ускорением  $a_2 = 3a_1$ . Средняя скорость автомобиля на первой половине всего времени движения оказалась равной  $u = 10 \text{ м/с}$ . Определите среднюю скорость движения автомобиля за вторую половину всего времени движения.

*А.Вергунов*

### 2. Абрам Кадабра

Экспериментатор Абрам Кадабра решил сэкономить немного денег и заказал динамометр через интернет. Продавец утверждал, что шкала прибора проградуирована для пружины жесткостью  $k_0 = 100 \text{ Н/м}$ . Абрам решил проверить это и подвесил к нему груз массой  $m = 300 \text{ г}$ , после чего стрелка динамометра указала на отметку  $F_1 = 4 \text{ Н}$  (рис. 8,а). Как оказалось, на динамометре была установлена пружина другой жесткостью  $k_1$ . Убрав груз, экспериментатор обнаружил, что в недеформированном состоянии стрелка динамометра указывает на отметку  $1,5 \text{ Н}$  (рис. 8,б). Абрам решил обрезать пружину так, чтобы стрелка стала указывать на отметку  $0 \text{ Н}$ . Затем он еще раз подвесил груз

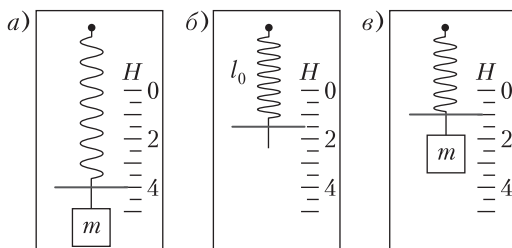


Рис. 8

массой  $m$  к динамометру, показания оказались равны  $F_2 = 1$  Н (рис. 8, в). По известным данным определите первоначальную длину  $l_0$  пружины жесткостью  $k_1$  в недеформированном состоянии.

*Примечание.* Коэффициент жесткости пружины обратно пропорционален длине пружины в недеформированном состоянии.

А.Вергунов

**3. ЧЯ**

Черный ящик с тремя выводами содержит источник постоянного напряжения  $\mathcal{E}$  и два резистора, сопротивления которых отличаются в три раза. Указанные элементы соединены по одной из двух схем: «звезда» или «треугольник». К выводам 1–2–3 черного

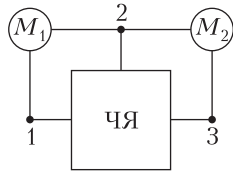


Рис. 9

ящика подключены два мультиметра  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 9). Если первый мультиметр  $M_1$  включить в режим амперметра, его показания будут зашкаливать на всех пределах измерений. А показания второго мультиметра  $M_2$  в режимах вольтметра и амперметра равны  $U_2 = 0$  В и  $I_2 = 0$  А соответственно. При переключении первого мультиметра в режим вольтметра его показания будут равны  $U_1 = 12$  В. Второй мультиметр покажет  $U_{22} = 3$  В и  $I_{22} = 20$  мА.

1) Установите, по какой схеме соединены элементы внутри черного ящика.

2) Определите значения напряжения источника и сопротивлений резисторов.

*Примечание.* Все измерительные приборы считайте идеальными.

А.Вергунов

**4. По очень тонкому льду**

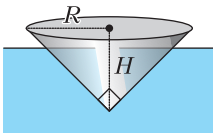


Рис. 10

Льдина в виде конуса с прямым углом при вершине (рис. 10) устойчиво плавает в воде. При каком минимальном радиусе  $R$  основания конуса мальчик массой

$m = 50$  кг сможет стоять в центре льдины, не замочив ног?

*Примечание.* Плотность воды  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность льда  $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup>, объем конуса  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ .

А.Вергунов

**5. Входит и выходит**

В трех теплоизолированных стаканах находится разное количество воды при разных температурах (рис. 11). Кусок льда с поло-

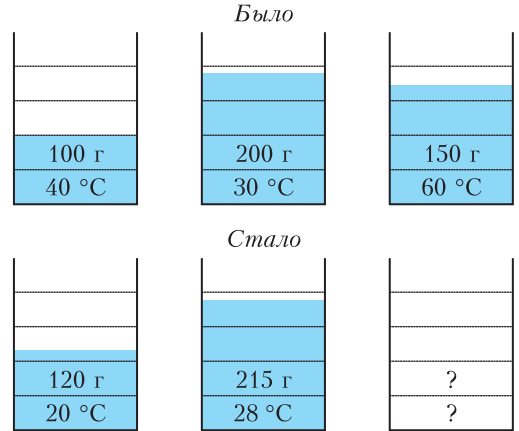


Рис. 11

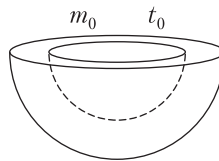


Рис. 12

стью, изображенный на рисунке 12, погружают в первый стакан, а затем по очереди погружают в два других. В результате опыта льдинка полностью растаяла и в стаканах оказались новые количества жидкости с новыми температурами. Начальные масса и температура льдинки равны  $m_0 = 50$  г и  $t_0 = 0$  °С. Какая масса воды и при какой температуре окажется в третьем стакане? При переносе льдинки вода мимо не проливается. Удельная теплоемкость воды  $c = 4200$  Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 330$  кДж/кг.

А.Вергунов

**10 класс**

**1. Струйка воды**

Открытый в атмосферу цилиндрический сосуд частично заполнен идеальной несжимаемой жидкостью – водой – и расположен на горизонтальной плоскости (рис. 13). На

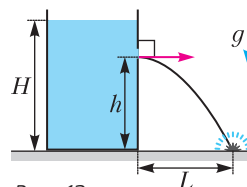


Рис. 13

поверхности цилиндра имеется отверстие из которого вытекает струйка воды, причем ее начальная скорость параллельна земной поверхности

сти. Струйка воды попадает на землю на расстоянии  $L = H$  от цилиндра. Определите, на какой высоте  $h$  от земли находится отверстие в сосуде.

*Примечание.* Для скорости струи жидкости на вылете из сосуда воспользуйтесь формулой Торричелли  $v_0 = \sqrt{2g(H-h)}$ .

*Фольклор*

### 2. Бросок шайбы

С высоты  $H$  параллельно горизонтальной поверхности бросили шайбу массой  $m$  со скоростью  $v$  (рис. 14). После частично упругого удара, двигаясь вертикально вверх, шайба подлетела на высоту  $h < H$ . Плоскость шайбы все время была горизонтальна, и шайба не вращалась относительно оси симметрии. Ускорение свободного падения  $g$ .

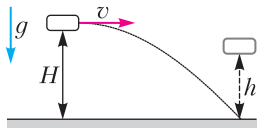


Рис. 14

1) Какое количество теплоты  $Q$  выделилось при ударе шайбы о поверхность?

2) Найдите минимально возможный коэффициент трения  $\mu$  шайбы о поверхность.

*А. Уймин*

### 3. Кубик и горка

Маленький кубик массой  $M$  съезжает с незакрепленной горки высотой  $H$  и массой  $nM$  (рис. 15). После абсолютно упругого столкновения со стенкой кубик догоняет горку и поднимается на нее.

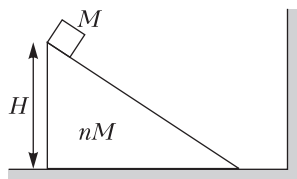


Рис. 15

1) Найдите скорость горки  $u$  после первого расставания с кубиком.

2) На какую максимальную высоту  $h$  поднимется по горке кубик после удара о стенку?

Трения в системе нет, переход горки в полплавный, ускорение свободного падения  $g$ .

*К. Кутелев*

### 4. Кольцо со стрелкой

Однородный проводник сопротивлением  $R$  согнули в виде кольца и место соединения (точка  $B$  на рисунке 16) спаяли с подводющим проводом от источника постоянного напряжения  $U$  через идеальный амперметр.

Другую клемму последовательно через резистор сопротивлением  $r$  соединили с осью  $A$  вращения подвижной стрелки. В начальный момент времени стрелка своим концом касается точки  $B$ . Стрелку начинают вращать относительно оси  $A$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , сохраняя контакт между стрелкой и кольцом.

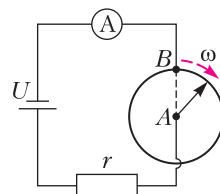


Рис. 16

1) Какое минимальное показание  $I_{\min}$  будет у амперметра после начала вращения стрелки?

2) Спустя какое время  $t$  показания амперметра впервые будут минимальными?

3) Постройте качественный график зависимости сопротивления цепи от времени с указанием характерных точек.

Подводящий провод в точке  $A$  не контактирует с кольцом и никак не мешает движению стрелки, сопротивлением которой можно пренебречь. Все указанные физические величины в задаче считайте известными.

*М. Клепиков*

### 5. Лампочка в зеркале

Сквозь маленькое центральное отверстие в крышке полусферического зеркала опускают шарообразную лампочку, верхняя половина которой покрашена (рис. 17). Поверхность крышки матовая, так что дает только диффузное отражение. Радиус кривизны зеркала  $R$ , скорость движения лампочки  $v$ . За начало отсчета времени примите момент попадания лампочки под крышку.

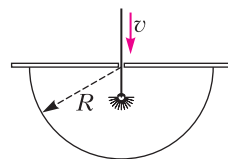


Рис. 17

1) Через какое время  $t$  будет засвечена вся крышка?

2) Чему равна минимальная площадь  $S_{\min}$  освещенной части крышки за все время движения лампочки до нижней точки зеркала?

Размеры лампочки пренебрежимо малы.

*М. Клепиков*

## 11 класс

### 1. 60° и 30°

С высокой башни одновременно бросают два камня с одинаковой по модулю началь-

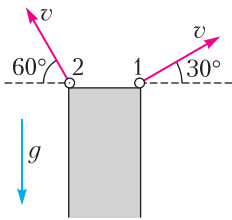


Рис. 18

ной скоростью  $v$  под углами  $30^\circ$  и  $60^\circ$  к горизонту (рис. 18). Через какое время  $\tau_1$  скорость первого камня станет направленной горизонтально? Через какое время  $\tau$  скорости камней снова будут перпендикулярны друг другу? Траектории камней лежат в одной плоскости. Ускорение свободного падения  $g$ . Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

А.Киреев

**2.  $30^\circ$  и  $60^\circ$**

Из проволоки изготовили рамку в форме прямоугольного треугольника с углами при вершинах  $30^\circ$  и  $60^\circ$  и закрепили ее в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке 19. Гипотенуза треугольника горизонтальна. По проволоке могут скользить без трения небольшие бусинки одинаковой массой  $m$ . Бусинки соединены невесомой пружиной жесткостью  $k$ . Длина пружины в недеформированном состоянии  $l_0$ . Ускорение свободного падения  $g$ . Известно, что в положении равновесия бусинки располагаются на катетах треугольника. Найдите расстояние  $l$  между бусинками и угол  $\alpha$  между пружиной и горизонталью в этом положении.

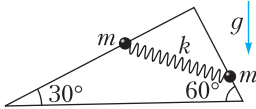


Рис. 19

Рис. 19

А.Киреев

**3. Фольклор**

С одним молем идеального одноатомного газа совершают циклический процесс  $1-2-3-1$ , как показано на  $Vp$ -диаграмме (рис. 20). В процессах  $1-2$  и  $2-3$  давление газа линейно зависит от объема, причем продолжение графика процесса  $1-2$  проходит через начало координат; процесс  $3-1$  – изохорический. Известно, что температура в точке 1 равна  $T_0 = 200$  К.

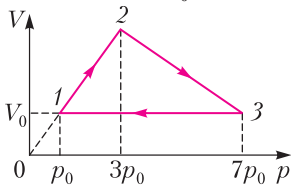


Рис. 20

- 1) Найдите температуру  $T_2$  газа в точке 2.
- 2) Какое количество теплоты  $Q_{12}$  подвели к газу в процессе  $1-2$ ?

3) Определите работу  $A$  газа за цикл. Газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К).  
А.Киреев

**4. По трубе**

Непроводящая незаряженная тонкая трубка согнута в виде полуокружности радиусом  $R$ , расположена в вертикальной плоскости и находится в однородном постоянном во времени магнитном поле с индукцией  $B$  (рис. 21). Линии индукции горизонтальны и перпендикулярны плоскости полуокружности.

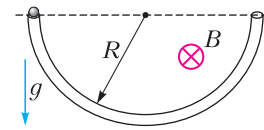


Рис. 21

Оба конца трубки находятся на одной горизонтали. Внутри трубки вблизи края с одной стороны отпускают с нулевой начальной скоростью небольшой диэлектрический шарик массой  $m$  с зарядом  $q$  ( $q > 0$ ). Определите максимальную скорость  $v_{max}$  шарика и максимальную силу  $N_{max}$  взаимодействия шарика и трубки в процессе дальнейшего движения. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения  $g$ . Известно, что  $\frac{qB}{3m} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$ . При движении шарика внутри трубки электрический заряд шарика остается неизменным.

А.Киреев

**5. Разрядка**

В электрической цепи, схема которой показана на рисунке 22, ключ  $K$  разомкнут, а конденсаторы заряжены до некоторого неизвестного напряжения. Найдите силу тока  $I_0$

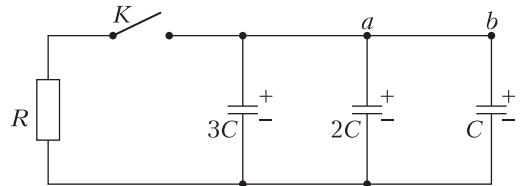


Рис. 22

через резистор сопротивлением  $R$  в некоторый момент времени после замыкания ключа, если известно, что в этот момент сила тока через перемычку  $ab$  равна  $I_1$ . Чему равен заряд  $q_1$  конденсатора емкостью  $C$  в этот момент? Емкости конденсаторов  $C$ ,  $2C$  и  $3C$  известны. Сопротивление перемычки и соединительных проводов пренебрежимо мало.

А.Киреев

Публикацию подготовил К.Кутелев



# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №1)

1.  $120^\circ$ .

Треугольник, расположенный между квадратами, является прямоугольным (рис. 1), при этом его катет в 2 раза меньше гипотенузы. Значит, в нем угол  $60^\circ$ . Тогда искомый угол равен  $360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ$ .

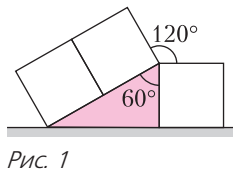


Рис. 1

2.  $3 \times 5 \times 15 = 225$ .

Пять сторон по 3 укладываются в одну длинную сторону бруска, поэтому она равна  $5 \times 3 = 15$ . Три средние стороны бруска укладываются в одну длинную, поэтому они равны по  $15/3 = 5$ .

3. 4.

Шахматисты набрали в сумме 37 баллов, а любители шашек – 35. Пусть те пятеро, кто любят и шашки, и шахматы, набрали  $x$  баллов. Пять шахматистов, не любящие шашки, в сумме набрали  $(37 - x)$  баллов, и каждый из них получил не более 5 баллов, поэтому  $37 - x \leq 25$ , поэтому  $x \geq 12$ . Все в сумме набрали  $(35 - x) + x + (37 - x) = 72 - x \leq 72 - 12 = 60$  баллов, т.е. средний балл в классе не больше  $60/15 = 4$ . Пример, когда средний балл именно таков, существует: достаточно, чтобы любители и шашек, и шахмат набрали 12 баллов (например,  $2 + 2 + 2 + 3 + 3$ ), шахматисты, не любящие шашки, набрали  $37 - 12 = 25$  баллов ( $5 + 5 + 5 + 5 + 5$ ) и любители шашек, не любящие шахматы, набрали  $35 - 12 = 23$  балла (например,  $5 + 5 + 5 + 4 + 4$ ).

4. 3:2.

Пусть  $O$  – центр окружности. Тогда в треугольнике  $AOE$  сумма квадратов катетов равна квадрату гипо-

тенузы:  $OA^2 + OE^2 = AE^2$ , ведь  $(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4^2$ .

Следовательно, он является прямоугольным и угол  $AOE$  прямой. Так как этот угол является центральным в окружности, то дуга  $AE$  составляет четверть окружности. Продлим  $BC$  до второго пересечения с окружностью, в точке  $K$ . Так как угол  $ABK$  вписанный, равный  $45^\circ$ , то дуга  $AK$  также составляет четверть окружности. Значит, точка  $K$  совпадает с точкой  $E$ , т.е. точка  $C$  лежит на хорде  $BE$  (рис. 2). Проделав то же рассуждение с отрезком  $DC$ , получим, что  $C$  также лежит на хорде  $DA$ . Следовательно, углы  $ACB$  и  $ECD$  вертикальны и треугольники  $ACB$  и  $ECD$  подобны по трем углам. Из подобия получаем, что отношения сторон равны:

$$BC : CD = AB : ED = 3 : 2.$$

## Конкурс имени А.П.Савина

(см. «Квант» №11-12 за 2022 г.)

9. Да, 1 пирожок с капустой, 1 с картошкой, 2 с яблоками.

Школьники будут брать сначала пирожки с капустой, а потом то с капустой, то с картошкой, пока количества пирожков всех трех видов не сравняются. Дальше они будут брать пирожки всех трех видов поочередно. Значит, если в конце на блюде  $x$  пирожков с яблоками, то с капустой и картошкой – по  $x - 1$ . По условию  $x = (x - 1) + (x - 1)$ , т.е.  $x = 2$ .

10. Нет.

Во-первых, поймем, что 16 полукубиков, помещенные в куб  $2 \times 2 \times 2$ , обязательно разбиваются на пары, образующие вместе кубики  $1 \times 1 \times 1$ . У полукубика есть только ребра длин 1 и  $\sqrt{2}$ . Ребро куба со стороной 2 может складываться из отрезков с такими длинами только одним образом:  $1 + 1$ . Рассмотрим, каким образом полукубики примыкают к одной грани  $2 \times 2$ . К каждой ее стороне примыкают две стороны длины 1 – каждая из них это либо сторона квадрата  $1 \times 1$ , либо катет прямоугольного треугольника с катетами 1 и 1. Отсюда ясно, что полукубики разбиваются на пары, образующие вместе кубики  $1 \times 1 \times 1$ .

Все фигурки, кроме кубика  $1 \times 1 \times 1$ , расположены внутри параллелепипеда  $1 \times 1 \times 2$  так, что их полукубики лежат в разных единичных кубиках параллелепипеда (рис. 3). Предположим, что куб

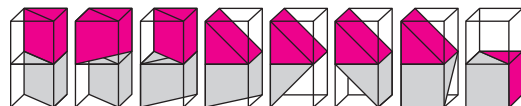


Рис. 3

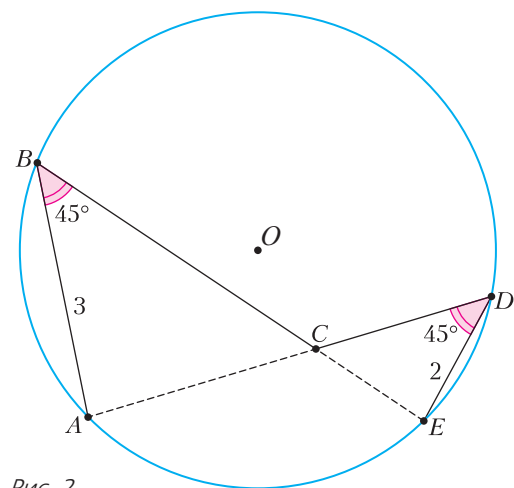


Рис. 2

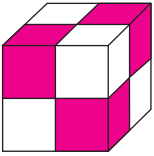


Рис. 4

$2 \times 2 \times 2$  удалось сложить из этих фигурок. Раскрасим его в шахматном порядке (рис. 4). Для любого из семи кусочков змейки, кроме кубика, один из его полукубиков попадет в белую часть, другой его полукубик — в красную. Таким образом, для кубика  $1 \times 1 \times 1$  останется пространство, состоящее из одного белого полукубика и одного красного. Но это невозможно, так как в приведенной раскраске куба каждый единичный кубик либо белый, либо красный.

**11. 5.**

Каждая вершина 20-угольника должна быть вершиной хотя бы одного из параллелограммов.

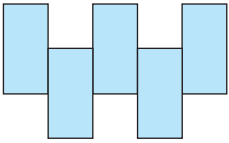


Рис. 5

Поэтому в сумме у параллелограммов не меньше 20 вершин, т.е. количество прямоугольников не меньше 5. Пример привести нетрудно (рис. 5).

**12. 150150.**

Найдем наибольшее значение суммы всех разностей чисел одного цвета и вычтем ее из суммы всех разностей.

Пусть числа первого цвета, упорядоченные по возрастанию, это  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ , второго цвета —  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{10}$ , и т.д. (цвета соответствуют буквам  $a, b, c, \dots, j$ ). Сумма всех разностей чисел первого цвета равна

$$-9a_1 - 7a_2 - 5a_3 - 3a_4 - 1a_5 + \\ + 1a_6 + 3a_7 + 5a_8 + 7a_9 + 9a_{10},$$

так как  $a_1$  встречается в девяти разностях со знаком минус,  $a_2$  встречается в восьми разностях со знаком минус и в одной со знаком плюс, и т.д. Сложив эти выражения для всех цветов, получим

$$-9S_1 - 7S_2 - 5S_3 - 3S_4 - 1S_5 + \\ + 1S_6 + 3S_7 + 5S_8 + 7S_9 + 9S_{10},$$

где  $S_k = a_k + b_k + c_k + \dots + j_k$  для  $k$  от 1 до 10.

Таким образом, чтобы сумма всех разностей чисел одного цвета была наибольшей, нужно, чтобы в  $S_1$  входили 10 самых маленьких чисел (от 1 до 10), в  $S_2$  следующие по величине (от 11 до 20) и так далее.

Осталось получить ответ для какой-либо раскраски чисел, удовлетворяющей этому свойству. Пусть числа первого цвета 1, 11, 21, ..., второго цвета 2, 12, 22, ... и т.д. Числа  $k$ -го цвета:  $k, 10+k, 20+k, \dots$  Разности между ними будут такими же, как между числами 0, 10, 20, ..., 90

(слагаемое  $k$  будет сокращаться в каждой разности). Сумма этих разностей будет в 10 раз больше, чем между числами 0, 1, 2, ..., 9. Обозначим сумму разностей всех чисел от 0 до  $n$  через  $X(n)$ . Тогда для нечетного  $n$

$$X(n) = -0 \cdot n - 1 \cdot (n-2) - 2 \cdot (n-4) + \dots \\ \dots + (n-2) \cdot (n-4) + (n-1) \cdot (n-2) + n \cdot n = \\ = 1^2 + 3^2 + \dots + (n-2)^2 + n^2,$$

т.е.  $X(n)$  — сумма квадратов нечетных чисел от 1 до  $n$ .

Воспользуемся известной формулой (о ней можно прочитать, например, в статье Г. Мерзона «Как найти сумму степеней» в «Кванте» №4 за 2018 год) суммы квадратов всех чисел от 1 до  $n$ :

$$X(n) = 1^2 + 3^2 + \dots + (n-2)^2 + n^2 = \\ = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) - \\ - (2^2 + 4^2 + \dots + (n-1)^2) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots \\ \dots + (n-1)^2 + n^2) - 4 \left( 1^2 + 2^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \right) = \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n}{6} = \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)(n+1)n}{6} = \\ = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Итак, сумма разностей чисел каждого цвета равна  $10 \cdot X(9)$ , значит, так как цветов 10, сумма всех разностей чисел одного цвета равна  $100 \cdot X(9)$ . Осталось вычесть ее из суммы всех разностей между числами 1, 2, 3, ..., 100. Она такая же, как сумма всех разностей между числами 0, 1, 2, ..., 99, т.е.  $X(99)$ .

Получаем ответ:

$$X(99) - 100 \cdot X(9) = \\ = \frac{99 \cdot 100 \cdot 101}{6} - 100 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{6} = 150150.$$

**13. а)** Да, например, 12334 ( $\text{Э} = 12, \text{М} = 3, \text{А} = 4, \text{В} = 1, \text{Е} = 2, \text{Р} = 33$ ); б) Нет.

В имени «Эмма» 4 буквы, значит, оно записано не более чем 8 цифрами. В имени «Леонтий» 7 букв, значит, если эти имена зашифрованы одинаково, то в их записи либо 7, либо 8 цифр. Тогда буква М зашифрована двузначным числом (иначе «Эмма» превратится в не более чем шестизначное число). Но в имени «Леонтий» нет

Э	М	М	А
Л	Е	Н	Т
И	Й		

Рис. 6

повторяющихся пар букв — значит, последняя цифра первой буквы М и первая цифра второй образуют число, зашифровывающее одну и ту же букву. Тогда каждое имя превратилось в 8-значное число, причем «двузначных» букв 4: это Э, М, А и Н (рис. 6). Двузначный номер может начинаться только с 1, 2 или 3 — значит, какие-то две из этих букв начинаются с одного и того же числа. Но каждой из «двузначных» букв соответствует своя «однозначная» первая: Э = ЛЕ, М = ОТ, Н = ТО, А = ИЙ — значит, какие-то из букв Л, О, Т, И окажутся заменены одной и той же цифрой — противоречие.

**14. 2.**

У такого четырехугольника найдутся соседние стороны длин 1 и 2. Тогда можно провести диагональ, делящую четырехугольник на два треугольника со сторонами 1 и 2 каждый. Но среди всех таких треугольников наибольшую площадь имеет тот, у которого угол между этими сторонами прямой. Это видно, например, из формулы площади треугольника: длину стороны надо разделить пополам и умножить на длину высоты к этой стороне. Наибольшая высота к стороне 2 будет равна 1, когда вторая сторона ей перпендикулярна. Поэтому четырехугольник максимальной площади сложен из двух прямоугольных треугольников с катетами 1 и 2, склеенных по гипотенузе (таких четырехугольников два).

**15. 3.**

Покажем, что двух клопов в точках А, В не хватит. Пусть расстояние от блохи до прямой АВ равно  $h$ . При прыжках расстояние от блохи до прямой АВ не изменяется. Поэтому блоха будет находиться все время на одной из двух прямых, удаленных от прямой АВ на расстояние  $h$ . Но двумя прямыми нельзя пересечь все точки, в которые требуется попасть по условию.

Трех клопов хватит. Пусть их координаты  $A(0;0)$ ,  $B(0;0,5)$ ,  $C(0,5;0)$ . Если блоха прыгнет через А, затем через В, то она сдвинется на 1 вверх (по оси  $y$ ), а если прыгнет через А, затем через С, то сдвинется на 1 вправо (по оси  $x$ ). Таким образом она сможет пройти до любой нужной точки.

**16.**  $5000005$  и  $5000005 \pm d$ , где  $d$  равно 1, 2, 5 или 10.

Обозначим члены последовательности как  $a_1, a_2, a_3, \dots$  и  $B_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+9}$ . Пусть  $B_1 = s$ . Тогда если  $B_2 = s$ , то  $a_1 = a_{11}$ , что невозможно, поэтому  $B_2 = t$ . Рассматривая таким образом последовательно все десятки чисел, получим, что  $B_i$

равно  $s$  при нечетных  $i$  и равно  $t$  при четных  $i$ . Заметим, что сумма всех чисел от 1 до 1000000 это  $B_1 + B_{11} + B_{21} + \dots + B_{999991} = 100000s$ . Отсюда находим

$$s = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 1000000}{100000} = \frac{1000000 \cdot 1000001}{2 \cdot 100000} = 5000005.$$

Разность  $a_{i+10} - a_i = B_{i+1} - B_i$  равна  $t - s$  при нечетных  $i$  и равна  $s - t$  при четных  $i$ . Таким образом, все числа разбиваются на 10 арифметических прогрессий  $a_1, a_{11}, a_{21}, \dots; a_2, a_{12}, a_{22}, \dots; \dots; a_{10}, a_{20}, a_{30}, \dots$ , пять из которых имеют разность  $(s - t)$ , а другие пять — разность  $(t - s)$ , и в каждой из прогрессий по 100000 членов.

Обозначим  $d = |s - t|$ . Выясним, при каких  $d$  числа от 1 до 1000000 можно разбить на 10 прогрессий длины 100000 с разностью  $d$ . Числа от 1 до  $d$  не могут быть в одной прогрессии, поэтому все они являются первыми членами разных прогрессий. Эти  $d$  прогрессий содержат все числа от 1 до  $100000d$ . Те же рассуждения можно провести для оставшихся чисел. Таким образом, миллион чисел разбивается на блоки длиной  $100000d$ . Значит, число  $d$  является делителем числа 10.

Так как  $|s - t| = d$  это одно из чисел 1, 2, 5, 10, то существует 8 вариантов значения числа  $t$ . Для каждого значения  $t$  действительно существует пример: разбиваем числа от 1 до 1000000 на арифметические прогрессии с разностью  $d$  и располагаем их на местах 1, 11, 21, ...; 2, 12, 22, ...; 3, 13, 23 ...; ... так, чтобы возрастающие и убывающие (это прогрессии с разностью  $d$ , записанные в обратном порядке) прогрессии чередовались.

**Калейдоскоп «Кванта»**

**Вопросы и задачи**

1. Большая часть побережья Нидерландов лежит ниже уровня моря. Если дамбы не будет, вода зальет уголья — вспомните закон сообщающихся сосудов.
2. Движение молекул не прекращается в невесомости, поэтому сжатый воздух и на орбитальной станции производит давление на стенки баллона, который, разумеется, должен быть столь же прочным, как и на Земле.
3. Скорость молекул угарного газа больше, чем скорость молекул кислорода, так как при одной и той же температуре их средние кинетические энергии равны, а масса молекул кислорода больше, чем масса молекул угарного газа.
4. Если размеры животных увеличатся, допустим, вдвое, то их масса, а значит, и скорость

тепловыделения возрастут в восемь раз, но поверхность тела и связанная с ней скорость потери тепла увеличатся лишь в четыре раза. Поэтому чем холоднее климат, тем крупнее (как правило) животное. Яркие примеры – мамонты, которые были во много раз больше слонов, или обитающие в холодных водах огромные киты.

**5.** Корни растений нуждаются в воздухе. Частично они получают его при поливке, так как в сырой воде много растворенного воздуха. А в кипяченой его почти нет.

**6.** Иней, обладая плохой теплопроводностью, препятствует переохлаждению растений.

**7.** Густой клеточный сок, в котором много сахара, замерзает при более низкой температуре, чем вода. Поэтому такие растения легче переносят заморозки.

**8.** Отходы в виде пыли оседают на поверхность ледников, что ускоряет их таяние под действием солнечных лучей. Это существенно влияет на изменение климата.

**9.** Здания блокируют воздушные потоки. В городе меньше потери тепла на испарение, так как вода быстро уходит в ливневую систему; температура темных поверхностей, особенно асфальта, достигает высоких значений.

**10.** Пылинки промышленных отходов и частицы дыма при большой влажности служат центрами конденсации водяных паров, из-за чего масса таких частиц возрастает и уменьшается скорость их диффузии. Это приводит к созданию дымовых облаков.

**11.** Свет от городских огней, отраженный дымкой, распространяется в направлении наблюдателя, сохраняя главным образом красный цвет, поскольку свет от синей части спектра рассеивается в воздухе (отчего днем небо имеет голубой цвет).

**12.** Такое топливо известно – это водород. При его сгорании образуется вода. Однако для создания эффективных водородных двигателей надо преодолеть немало проблем, например – разработка легких и безопасных емкостей для хранения газа.

**13.** Причина ожогов – ультрафиолет. Утром и вечером он слабее, так как солнечные лучи проходят больший путь в атмосфере. В горах же этот путь короче; на пляже к облучению сверху добавляется отражение от песка. Стекло же сильно поглощает ультрафиолетовые лучи.

**14.** Один из главных факторов – изменение длины светового дня, так как свет влияет на активность фотосинтеза. Также сигналом приближения осени служит похолодание, сказывающееся на скорости внутриклеточных процессов.

**15.** Чувствительным индикатором радиоактивного излучения является улитка. По существу – это живой счетчик Гейгера.

**16.** Период полураспада стронция-90 всего около 28 лет. Откладываясь в костях животных и человека, он вызывает тяжелые недуги.

**17.** Свинец задерживает гамма-излучение, но пропускает нейтроны, тогда как кадмий, пропускающая гамма-излучение, нейтроны задерживает.

### Микроопыт

Свет лампы дневного света излучается с поверхности, площадь которой многократно превышает площадь поверхности нити лампы накаливания, поэтому на сетчатке глаза ее изображение покрывает множество светочувствительных клеток. Световая энергия, приходящаяся на одну клетку, существенно меньше, и такая лампа не «режет» глаза.

### Повороты и круговые интерпретации

**4.** Расположим круги так, чтобы границы секторов совместились. После этого зафиксируем один круг, а другой будем поворачивать на все углы вида  $\pi/k$ , т.е. всеми способами, при которых границы секторов совмещаются. При этом каждый сектор будет при половине способов совмещаться с сектором того же цвета, а при половине способов – с сектором другого цвета. Следовательно, при таких поворотах число совмещений одноцветных секторов равно числу совмещений разноцветных секторов. Поэтому хотя бы для одного поворота число совмещений разноцветных секторов не меньше числа совмещений одноцветных секторов.

**5.** Рассмотрим все возможные 2000 поворотов. Всего красные секторы накладываются друг на друга  $200^2$  раз. Предположим, всего есть не менее  $n$  положений, когда совпадают не менее 21 сектора, тогда всего наложений не менее  $21n$ . Значит,  $200^2 \geq 21n$ , откуда  $n \leq 1904$ . Поэтому в остальных положениях (их хотя бы  $2000 - 1904 = 96$ ) совпадают не более 20 секторов.

**6.** Изобразим шкатулки точками на 13-окружности. Пусть точки 1, 2, 5, 7 образуют *шаблон* (заметим, что точки выбраны так же, как в задаче 2). Где бы ни находились две точки, отвечающие шкатулкам с монетами, мы можем накрыть их обе некоторым поворотом этого шаблона на  $k$  делений. Теперь если помощник откроет шкатулку  $k$ , то фокусник откроет шкатулку с номерами  $k+1$ ,  $k+2$ ,  $k+5$ ,  $k+7$  – и обе шкатулки с монетами будут среди этих четырех.

**8.** Концы искомым хорд – те же самые 4 точки, что концы хорд, найденных в предыдущей задаче.

че. В обозначениях на рисунке 2 статьи это хорды  $AB$  и  $CD$ .

**9.** Пусть цвета – синий, красный, желтый. Нарисуем черный 45-угольник на прозрачной пленке и наложим его на исходный. Назовем это положением  $C$ . Обведем на пленке кружками 15 синих вершин. Поворачивая пленку каждый раз на угол  $360^\circ : 45 = 8^\circ$ , совмещаем вершины на пленке с вершинами исходного 45-угольника и считаем количество кружков, содержащих красные вершины. В среднем за полный оборот это количество равно  $15 \cdot 15 / 45 = 5$ . Так как в положении  $C$  таких кружков 0, то в некотором положении  $K$  красных кружков не менее шести. Оставим на пленке только эти шесть кружков. Аналогично найдем положение пленки  $Ж$ , где в эти 6 кружков попало более  $15 \cdot 6 / 45 = 2$  (т.е. не менее трех) желтых вершин. Сотрем все кружки, кроме этих трех. Они и дадут нам три равных треугольника: в положении  $Ж$  – желтый, в положении  $K$  – красный, в положении  $C$  – синий.

**11.** Отметим на одной окружности 10 точек равномерно: расстояние между соседними будет равно  $a/10$ . На другой окружности отметим одну дугу длины 10. Ни при каком повороте эта дуга не поместится целиком между двумя отмеченными точками, потому что  $a/10 < 10$ .

**13.** Да, можно. Рассмотрим окружность длины 98 и красными точками разобьем ее на дуги, длины которых равны достоинствам монет. Затем каждую дугу разобьем черными точками на дуги длины 1. Таким образом окружность будет разбита 50 красными точками и  $98 - 50 = 48$  черными точками на дуги длины 1. Все эти 98 точек бьются на 49 пар противоположных. Так как черных точек меньше, чем пар, то найдется пара красных противоположных точек. Диаметр, соединяющий эти точки, делит набор дуг на две части с равной суммарной длиной. А значит, соответствующие им достоинства монет также равны по сумме.

**20.** Пусть  $a_k - k$ -я сторона, а  $L_k$  – длина соответствующей дуги (мы нумеруем стороны «по кругу», допуская номера  $k > 50$ , подразумевая в таком случае  $a_{k-50}$  вместо  $a_k$  и т. п.). Стороны  $a_k$  и  $a_{k+25}$  параллельны, когда заключенные между ними дуги равны, т.е. когда число

$$S_k = (L_{k+1} + L_{k+2} + \dots + L_{k+24}) - (L_{k+26} + L_{k+27} + \dots + L_{k+49})$$

равно нулю. Число  $S_k$  кратно 50 как сумма 24 разностей  $L_{k+1} - L_{k+26}$ ,  $L_{k+2} - L_{k+27}$ , ..., равных  $\pm 25$ . Разность соседей  $S_{k+1} - S_k = (L_{k+25} - L_k) +$

$(L_{k+26} - L_{k+1})$  может принимать значения 0 и  $\pm 50$ . Поэтому при переходе от  $S_1$  к  $S_2$ , потом к  $S_3$  и так далее до  $S_{26}$  соответствующая величина каждый раз либо не меняется, либо переходит к соседнему кратному 50 числу. Очевидно,  $S_{26} = -S_1$ . Поэтому при некотором  $k$  число  $S_k$  обращается в ноль, что и требовалось.

**21.** Решение см. в «Кванте» №4 за 2005 год.

**22.** Решение см. в «Кванте» №3 за 2012 год.

### Муниципальный этап LVII Всероссийской олимпиады школьников по физике

7 класс

**1.** Расстояние между спортсменами – это путь, пройденный одним из них до старта следующей го. Отсюда

$$\Delta t = \frac{s}{v_1} = \frac{8 \text{ м}}{14,4 \text{ км/ч}} = \frac{8 \text{ м}}{4 \text{ м/с}} = 2 \text{ с.}$$

Временной интервал между спортсменами сохраняется.

Скорость на втором участке  $v_2 = 1800 \text{ дм/мин} = 3 \text{ м/с}$ . Скорость на третьем участке  $v_3 = \frac{d_3}{\Delta t} = \frac{10 \text{ м}}{2 \text{ с}} = 5 \text{ м/с}$ . Самый короткий участок – второй (время движения одинаковое, а скорость на нем наименьшая). Тогда время движения по нему  $t = \frac{d_2}{v_2} = \frac{15 \text{ м}}{3 \text{ м/с}} = 5 \text{ с}$ . Длина всей дистанции

$$s_{\text{полн}} = tv_3 + tv_2 + tv_1 = 60 \text{ м.}$$

На интервале движения по 2-у и 3-у участкам (10 с) уместается 5 временных интервалов между спортсменами (2 с). Значит, всего спортсменов 6.

**2.** Найдем, чему равна высота изображения  $H$ , выраженная в пикселях. Для этого посчитаем количество квадратов:

$$H = 37 \text{ пикселей.}$$

Составим пропорцию и найдем высоту  $H$  в дюймах:

$$\frac{300 \text{ пикселей}}{1 \text{ дюйм}} = \frac{37 \text{ пикселей}}{H},$$

$$H \approx 0,12 \text{ дюймов} \approx 0,3 \text{ см} = 3 \text{ мм.}$$

**3.** Масса масла  $m = \rho V = 9 \text{ г}$ . Время плавления масла

$$t_1 = \frac{m}{\mu} = \frac{9 \text{ г}}{3/14 \text{ г/с}} = 42 \text{ с.}$$

Время скольжения

$$t_2 = \frac{l}{v} = \frac{30 \text{ см}}{5/7 \text{ см/с}} = 42 \text{ с.}$$

Оба процесса закончатся одновременно. Массовый расход за единицу пути равен

$$\alpha = \frac{m}{l} = \frac{9 \text{ г}}{30 \text{ см}} = 0,3 \text{ г/см, или } \alpha = \frac{\mu}{v} = 0,3 \text{ г/см.}$$

4. Скорости пропорциональны расстояниям до неподвижной точки. На рисунке 2 в условии:

$$v_B = v \frac{r}{2r} = 0,5v, \text{ направлена вправо.}$$

$$\text{На рисунке 3: } v_B = v \frac{2l}{8l} = 0,25v, \text{ направлена вверх.}$$

$$\text{На рисунке 4: } v_B = v \frac{2r}{r} = 2v, \text{ направлена вправо.}$$

$$\text{На рисунке 5: } v_C = v_D = v \frac{2r}{r} = 2v, \text{ направлена}$$

$$\text{вверх, } v_E = v_F = v_C \frac{3l}{l} = 6v, \text{ направлена вниз,}$$

$$v_B = 0,5v_F = 0,5 \cdot 6v = 3v, \text{ направлена влево.}$$

### 8 класс

1. Объем стекла  $V_c = m/\rho_{\text{ст}} = 100 \text{ см}^3$ . Внешний объем бутылки утонула, ее суммарная масса должна превысить 600 г, т.е. в нее надо насыпать 350 г или больше вещества. Это реализуется, если плотность насыпаемого вещества будет равна или больше  $\rho = 0,7 \text{ г/см}^3$ . Сила Архимеда, действующая на утонувшую бутылку в этом случае, постоянна и равна  $F_A = 6,0 \text{ Н}$ . Если плотность насыпаемого вещества меньше  $0,7 \text{ г/см}^3$ , то бутылка будет плавать на поверхности, а сила Архимеда будет равна силе тяжести, действующей на бутылку:  $F_A = \rho g V_0 + mg$ . Это линейная зависимость от  $\rho$ ,  $F_A = 2,5 \text{ Н}$  при  $\rho = 0$  и  $F_A = 6,0 \text{ Н}$  при  $\rho = 0,7 \text{ г/см}^3$ . Соответствующий график приведен на рисунке 7.

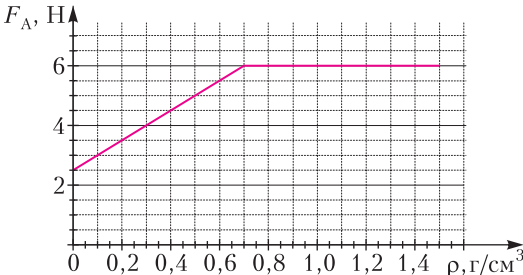


Рис. 7

2. При неизменной ширине пленки  $d$  ее объем  $V = Lhd$ , но его же можно записать через боко-

вую площадь рулона:  $V = Sd = (a^2 - b^2)d$ . Отсюда находим

$$L = \frac{a^2 - b^2}{h}.$$

Толщина рулона линейно растет с количеством оборотов. Среднюю длину пленки в обороте можно оценить как  $c = \frac{a+b}{2}$ . Тогда

$$n \approx \frac{L}{4c} = \frac{a^2 - b^2}{4h} \frac{2}{a+b} = \frac{a-b}{2h}.$$

3. Условие плавания:  $mg = F_A$ , или  $m = \rho_{\text{ж}} V_{\text{погр}}$ . Погруженный объем — это объем вытесненной жидкости, который увеличивает уровень жидкости в сосуде:  $V_{\text{погр}} = S_{\text{сосуда}} \Delta h$ . Масса жидкости связана с ее уровнем до погружения огурца:  $m_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}} V_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}} S_{\text{сосуда}} h$ . Уравнение теплового баланса:

$$c_{\text{ж}} m_{\text{ж}} (90^\circ \text{C} - 60^\circ \text{C}) = c_{\text{Al}} m (60^\circ \text{C} - 10^\circ \text{C}),$$

или

$$\frac{c_{\text{Al}}}{c_{\text{ж}}} = \frac{m_{\text{ж}} (30^\circ \text{C})}{m (50^\circ \text{C})} = \frac{\rho_{\text{ж}} S_{\text{сосуда}} h (30^\circ \text{C})}{\rho_{\text{ж}} S_{\text{сосуда}} \Delta h (50^\circ \text{C})} = 6.$$

4. Стена находится на расстоянии  $L = 30 \text{ м}$  (объект с постоянной координатой на графике). Миша добегает до него за 15 с, значит, его скорость  $v = 2 \text{ м/с}$ . Мяч находится на расстоянии 6 м от мальчика и 24 м от стены.

После удара (координата 6 м, время 3 с) мяч двигался до встречи со стенкой (координата 30 м, время 6 с) со скоростью  $w = 8 \text{ м/с}$ . Обрато мяч двигался до встречи с мальчиком (координата 18 м, время 9 с) со скоростью  $u = 4 \text{ м/с}$ .

Если рассматривать движение мяча с точки зрения Миши, то можно заметить, что скорости удаления и приближения мяча равны  $8 \text{ м/с} - 2 \text{ м/с} = 6 \text{ м/с}$  и  $4 \text{ м/с} + 2 \text{ м/с} = 6 \text{ м/с}$ . Значит, мяч от Миши и к Мише при равных путях двигался равное время. При этом общее время движения мяча 12 с. Поэтому  $t_1 = t_2 = 6 \text{ с}$ .

### 9 класс

1. Время разгона будет в три раза больше времени торможения:  $t_2 = \tau$ ,  $t_1 = 3\tau$ . Построим качественный график зависимости скорости от времени (рис. 8). Путь, пройденный автомобилем на второй половине времени движения, пропорционален площади под графиком:

$$s_2 = \frac{1}{2} v_{\text{к}} \tau + \frac{v_1 + v_{\text{к}}}{2} \tau = 4a_1 \tau^2,$$

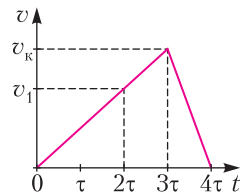


Рис. 8

поскольку  $v_k = 3a_1\tau$  и  $v_1 = 2a_1\tau$ . Средняя скорость движения автомобиля за вторую половину всего времени движения:

$$u_2 = \frac{s_2}{2\tau} = 2a_1\tau.$$

Средняя скорость движения автомобиля за первую половину всего времени движения:

$$u = \frac{s_1}{2\tau} = \frac{\frac{1}{2}v_1 \cdot 2\tau}{2\tau} = a_1\tau.$$

Значит,  $u_2 = 2u = 20$  м/с.

**2.** Так как шкала динамометра проградуирована для пружины с коэффициентом жесткости  $k_0$ , расстояние между двумя соседними отметками на шкале равно  $\Delta x = \frac{F_1/4}{k_0} = 0,5$  см. Из разности показаний динамометра на первых двух рисунках можно понять, что пружина растянулась на  $5\Delta x$ , когда к ней повесили груз массой  $m$  в первый раз:  $k_1 \cdot 5\Delta x = mg$ . После того как пружину укоротили, ее коэффициент жесткости изменился и стал равен  $k_2$ . Показания динамометра при повторном подвешивании того же груза  $m$  позволяют найти новое растяжение пружины:  $k_2 \cdot 2\Delta x = mg$ . Из этого получаем, что  $k_2 = 2,5k_1$ . С другой стороны,  $\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_0 - 3\Delta x}{l_0}$ , где  $3\Delta x$  — длина отрезанной части пружины. Тогда

$$l_0 = 5\Delta x = 2,5 \text{ см.}$$

**3.** То, что показания первого амперметра зашкаливают, а показания второго мультиметра равны нулю, означает подключение первого параллельно источнику напряжения. Такое возможно, если внутри черного ящика элементы подключены «треугольником». Тогда показания первого вольтметра равны напряжению источника:  $\mathcal{E} = U_1 = 12$  В. Проанализируем показания второго мультиметра во втором случае. Элементы соединены «треугольником», а значит, второй мультиметр подключен параллельно одному из резисторов. Напряжение на нем  $U_{22} = 3$  В, следовательно, это резистор с меньшим сопротивлением, так как напряжение на другом резисторе  $U_3 = U - U_{22} = 9$  В. Когда второй мультиметр работает в режиме амперметра, ток через резистор с меньшим сопротивлением не течет, следовательно,  $I_{22} = \frac{U}{3R}$ . Отсюда находим

$$R = \frac{U}{3I_{22}} = 200 \text{ Ом, } 3R = 600 \text{ Ом.}$$

**4.** Так как льдина является конусом с прямым углом при вершине, то  $H = R$ . Значит,  $V = \frac{1}{3}\pi R^3$ .

Обозначим массу льдины  $M$  и запишем условие плавания льдины:

$$F_A = Mg, \text{ или } \rho_0 V_{\text{пл}} g = \rho V g, \text{ откуда } \frac{V_{\text{пл}}}{V} = \frac{\rho}{\rho_0} = 0,9.$$

Тогда над поверхностью воды находится объем льда  $V_1 = 0,1V$ . Чтобы мальчик не намочил ноги, дополнительная сила тяжести должна компенсироваться силой Архимеда:

$$mg = \rho_0 V_1 g, \quad m = \frac{0,1}{3} \rho_0 \pi R^3, \quad R = \sqrt[3]{\frac{3m}{0,1\rho_0\pi}} \approx 78 \text{ см.}$$

**5.** Из закона сохранения массы найдем массу жидкости в третьем стакане:

$$m'_3 = m_1 + m_2 + m_3 + m_0 - m'_1 - m'_2 = 165 \text{ г.}$$

Охладим содержимое всех трех стаканов до  $0^\circ\text{C}$ , в таком случае выделится количество теплоты

$$Q_0 = c(m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3) = 79,8 \text{ кДж.}$$

После этого вернем  $Q_0$  в систему, при этом часть тепловой энергии пойдет на плавление льда, а оставшаяся — на нагрев воды общей массой  $450 \text{ г} + 50 \text{ г} = 500 \text{ г}$ :

$$Q_0 = c(m'_1 t'_1 + m'_2 t'_2 + m'_3 t'_3) + \lambda m_0.$$

Отсюда получаем

$$t'_3 = 40,3^\circ\text{C}.$$

10 класс

**1.** Вода после покидания сосуда движется с ускорением  $g$ . Уравнения движения в проекции на вертикальную и горизонтальную оси имеют вид

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = h - \frac{gt^2}{2}.$$

В точке падения

$$x(t_{\text{п}}) = L = v_0 t_{\text{п}}, \quad y(t_{\text{п}}) = 0 = h - \frac{gt_{\text{п}}^2}{2}.$$

Отсюда

$$t_{\text{п}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad L = \sqrt{2g(H-h)} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{4h(H-h)}.$$

Учитывая, что  $L = H$ , получим квадратное уравнение  $4h^2 - 4hH + H^2 = 0$  и найдем

$$h = \frac{H}{2}.$$

**2.** Запишем закон сохранения энергии с учетом тепловых потерь и найдем  $Q$ :

$$mgH + \frac{mv^2}{2} = mgh + Q, \text{ или } Q = mg(H-h) + \frac{mv^2}{2}.$$

Рассмотрим момент удара. Процесс быстрый, так что изменением импульса под действием силы тяжести можно пренебречь. Остается нормальная реакция опоры  $N$  и сила трения скольжения  $\mu N$ . Эти силы переменные во времени, под  $N$  будем подразумевать некоторое среднее эффективное значение. Минимальный коэффициент трения означает, что сила трения скольжения действовала до отрыва бруска (не переходила в трение покоя). Тогда  $\Delta p_y = N\Delta t$ ,  $\Delta p_x = \mu N\Delta t$ . Горизонтальная скорость в момент удара  $v_x = v$ , вертикальная скорость в момент удара  $v_y = \sqrt{2gH}$ , а в момент отрыва  $v'_y = \sqrt{2gh}$ . Получаем  $\Delta p_y = N\Delta t = m(v_y - v'_y)$ ,  $\Delta p_x = \mu N\Delta t = -mv$ , откуда

$$\mu = \frac{v}{\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh}}.$$

**3.** В процессе съезда проекция импульса системы кубик-горка на горизонтальную ось не меняется, механическая энергия системы сохраняется:

$$0 = Mv - nMu,$$

$$MgH = \frac{Mv^2}{2} + \frac{nMu^2}{2},$$

где  $v$  – скорость кубика в нижней точке. Решая систему, получим

$$v = \sqrt{\frac{2gHn}{n+1}}, \quad u = \sqrt{\frac{2gH}{n(n+1)}}.$$

После удара о стенку импульс системы станет

$$2nMu = 2Mv = 2M\sqrt{\frac{2gHn}{n+1}}.$$

В момент наивысшего подъема скорости горки и бруска будут одинаковы. Проекция импульса системы кубик-горка на горизонтальную ось опять не поменяется:

$$2M\sqrt{\frac{2gHn}{n+1}} = M(n+1)v_k, \quad \text{и } v_k = \frac{2}{n+1}\sqrt{\frac{2gHn}{n+1}}.$$

Из закона сохранения энергии

$$MgH = Mgh + \frac{M(n+1)v_k^2}{2} =$$

$$= Mgh + \frac{M(n+1)}{2} \frac{4}{(n+1)^2} \frac{2gHn}{(n+1)}$$

находим

$$h = H \left( 1 - \frac{4n}{(n+1)^2} \right) = H \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^2.$$

**4.** Обозначим через  $x$  сопротивление участка между точкой  $B$  и стрелкой:  $x = R \frac{\varphi}{2\pi} = R \frac{\omega t}{2\pi}$ .

Тогда общее сопротивление цепи будет

$$R_0 = r + \frac{x(R-x)}{R} = r + x - \frac{x^2}{R} =$$

$$= r + \frac{R\omega}{2\pi} t - \frac{R\omega^2}{4\pi^2} t^2.$$

Графически данная зависимость представлена на рисунке 9. Минимальное значение силы тока

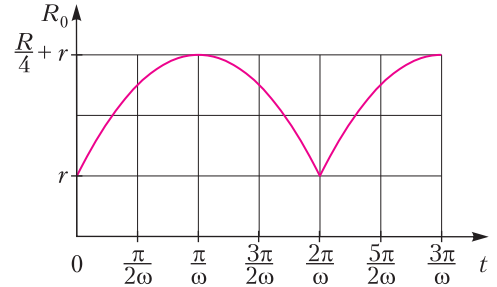


Рис. 9

будет соответствовать максимальному сопротивлению:

$$I_{\min} = \frac{U}{R_{0\max}} = \frac{U}{\frac{R}{4} + r}.$$

Впервые такая сила тока будет в цепи при  $t = \frac{\pi}{\omega}$ .

**5.** Из построения нескольких лучей (рис. 10) можно заметить, что радиус  $r$  освещенного пятна

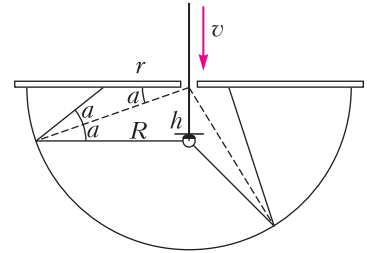


Рис. 10

определяется ходом горизонтального луча:  $r = R/(2\cos\alpha)$ . Угол связан с высотой:  $\sin\alpha = h/R$ . При засветке всей крышки  $R = \frac{R}{2\cos\alpha_1}$ . Отсюда

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \sin\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} R.$$

Это случится в момент времени

$$t = \frac{\sqrt{3} R}{2 v}.$$



Для минимальной площади засветки косинус должен стать максимальным:

$$r_{\min} = \frac{R}{2}, S_{\min} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

11 класс

1. Введем координатные оси  $x$  и  $y$ , направленные вправо и вверх соответственно. В отсутствие сил сопротивления воздуха движение камней является равноускоренным и происходит с ускорением свободного падения. Для проекций скоростей камней получаем

$$v_{1x} = v \cos 30^\circ, v_{2x} = -v \cos 60^\circ,$$

$$v_{1y} = v \sin 30^\circ - gt, v_{2y} = v \sin 60^\circ - gt.$$

При  $t = \tau_1$  скорость первого камня направлена горизонтально, значит,  $v_{y1} = 0$ , или  $0 = v \sin 30^\circ - \tau_1 g$ , откуда

$$\tau_1 = \frac{v \sin 30^\circ}{g} = \frac{v}{2g}.$$

При  $t = \tau$  скорости камней снова будут перпендикулярны друг другу, т.е.

$$\frac{v_{1x}}{v_{1y}} = -\frac{v_{2y}}{v_{2x}}, \text{ или } v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} = 0.$$

Получаем уравнение

$$v \cos 30^\circ (-v \cos 60^\circ) + (v \sin 30^\circ - g\tau)(v \sin 60^\circ - g\tau) = 0,$$

решая которое находим

$$\tau = \frac{(\sqrt{3} + 1)v}{2g} \text{ (корень } \tau = 0 \text{ не подходит)}.$$

2. Расставим силы, действующие на бусинки 1 и 2 (рис. 11):  $F$  – модуль силы упругости пружины,  $N_1$  и  $N_2$  – силы нормальных реакций, действующие на бусинки 1 и 2 соответственно. По теореме об углах со взаимно перпендикулярными сторонами,  $\beta_1 = 30^\circ$ ,  $\beta_2 = 60^\circ$ . Из условия равновесия бусинки 1 в проекции на ось  $x$  и бусинки 2 в проекции на ось  $y$ :

$$mg \sin \beta_1 = F \cos \varphi \text{ и } mg \sin \beta_2 = F \sin \varphi$$

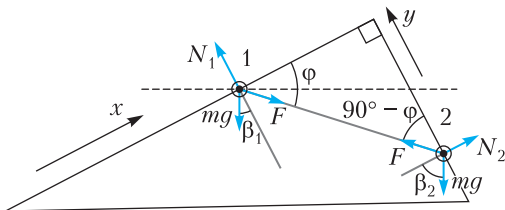


Рис. 11

получаем  $\tan \varphi = \sqrt{3}$ , а  $\varphi = 60^\circ$ . Значит, угол между пружиной и горизонталью в положении равновесия равен

$$\alpha = \varphi - 30^\circ = 30^\circ.$$

Также из условия равновесия найдем  $F = mg$ .

Запишем закон Гука для деформированной пружины в состоянии равновесия:  $F = k(l - l_0)$ , откуда

$$l = l_0 + \frac{F}{k} = l_0 + \frac{mg}{k}.$$

3. Введем обозначение  $\nu = 1$  моль – количество вещества. Так как в процессе 1–2 давление газа линейно зависит от объема и увеличивается в три раза, то  $V_2 = 3V_0$ . Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для точек 1 и 2 соответственно:  $p_0 V_0 = \nu R T_0$ ,  $3p_0 \cdot 3V_0 = \nu R T_2$  и получим

$$T_2 = 9T_0 = 1800 \text{ К}.$$

Работа  $A_{12}$ , совершенная газом на участке 1–2, равна

$$A_{12} = \frac{1}{2}(p_0 + 3p_0)(3V_0 - V_0) = 4p_0 V_0 = 4\nu R T_0.$$

Изменение внутренней энергии на участке 1–2 равно

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = 12\nu R T_0.$$

Согласно первому началу термодинамики,

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = 16\nu R T_0 \approx 26,6 \text{ кДж}.$$

Работа  $A$  газа за цикл отрицательна и равна

$$A = -\frac{1}{2}(7p_0 - p_0)(3V_0 - V_0) = -6\nu R T_0 \approx -9,97 \text{ кДж}.$$

4. Расставим силы, действующие на шарик в произвольный момент времени (рис. 12). Введем ось  $x$ , проходящую через шарик и центр окружности радиусом  $R$ . Предположим, что сила нормальной реакции  $N$  направлена к центру окружности. Магнитная составляющая силы Лоренца равна  $F = qvB \sin 90^\circ = qvB$  и направлена к центру окружности. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось  $x$ :

$$ma_x = N + F - mg \sin \alpha, \text{ где } a_x = \frac{v^2}{R}.$$

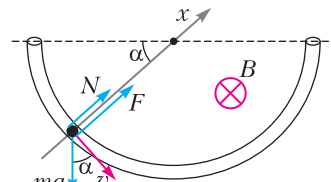


Рис. 12

При движении шарика в трубке магнитная составляющая силы Лоренца и сила нормальной реакции на шарик со стороны трубки работы не совершают, значит, полная механическая энергия шарика сохраняется:

$$mgR \sin \alpha = \frac{mv^2}{2}.$$

Максимальная скорость в процессе дальнейшего движения достигается в самой нижней точке трубки и равна

$$v_{\max} = \sqrt{2gR}.$$

С учетом второго закона Ньютона и закона сохранения энергии получаем зависимость силы нормальной реакции в проекции на ось  $x$  от скорости  $v$  шарика:

$$N = \frac{3mv^2}{2R} - qvB.$$

Эта зависимость квадратичная, ее графиком является парабола. Заметим, что  $N = 0$  при  $v = 0$  и,

с учетом соотношения  $\frac{qB}{3m} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$ , при  $v = v_{\max}$ . А при значениях  $v \in (0; v_{\max})$  сила реакции  $N < 0$ .

Найдем максимальное значение модуля силы реакции через координаты вершины параболы  $\left(\frac{qBR}{3m}; -\frac{q^2 B^2 R}{2m}\right)$ :

$$N_{\max} = \frac{q^2 B^2 R}{2m}.$$

5. Рассмотрим цепь в указанный момент времени (рис. 13). Пусть  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  – силы токов, текущие от конденсаторов, а  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  – заряды

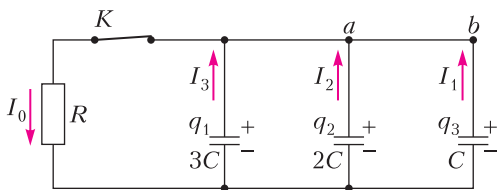


Рис. 13

конденсаторов. Так как конденсаторы соединены параллельно, то напряжения на них в любой момент времени одинаковы:

$$\frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{2C} = \frac{q_3}{3C}.$$

Аналогичным соотношением будут связаны и изменения зарядов, произошедшие за некоторый малый промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta q_1}{C} = \frac{\Delta q_2}{2C} = \frac{\Delta q_3}{3C}.$$

Отсюда приходим к соотношению для токов:

$$I_1 = \frac{I_2}{2} = \frac{I_3}{3}.$$

С учетом первого правила Кирхгофа,

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + 2I_1 + 3I_1 = 6I_1.$$

Напряжение на резисторе равно напряжению на первом конденсаторе:  $\frac{q_1}{C} = I_0 R$ , значит,

$$q_1 = CI_0 R = 6CI_1 R.$$

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, Н.М.Панюнин,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**М.Н.Голованова, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**М.Н.Грицук**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

Журнал «Квант» зарегистрирован  
в Комитете РФ по печати.

Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

Тел.: +7 916 168-64-74

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано

в соответствии с предоставленными  
материалами  
в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород,  
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8  
Тел.: (831) 218-40-40

## Красиво И РЕЗУЛЬТАТИВНО

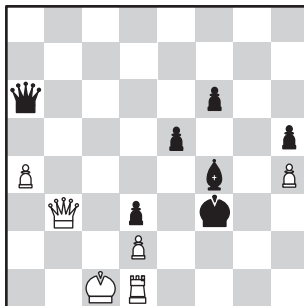
На протяжении долгого времени не утихает вечный вопрос любителей игры: что такое шахматы? Это скорее вид искусства или вид спорта? Что важнее: красивая игра или количество очков в турнирной таблице? Ответ для каждого свой, но настоящим украшением игры становятся редкие моменты, когда решающая партия выдается понастоящему зрелищной.

Таким событием стала партия последнего тура чемпионата Англии 2022 года, в которой решалась судьба титула. Она по праву претендует на звание лучшей партии прошлого года.

**М.Вадсворт – Х.Грив  
Торки, 2022**

1. c4 e6 2. g3 d5 3. ♔g2 c6 4. ♘f3 dc 5. ♗a3 b5 6. ♗b5 cb 7. ♗g1 ♘d7 8. ♗a8 ♗c6 9. ♗c6 ♗c6. Редкий и несколько диковинный вариант. Черные пожертвовали качество, но взамен получили двух сильных слонов. 10. ♘f3 ♗f6 11. b3 ♗c5 12. ♗b2 ♗d5 13. bc bc 14. ♗f6 gf 15. ♗c2 ♗e7 16. ♗ c1 ♗a3 17. ♗b1 ♘d6 18. ♗c3 ♗e4 19. ♗c1. Сохраняло преимущество 19. 0-0 с дальнейшим ♗e3 и разменом ферзей, но психологически тяжело рокировать, не имея белопольного слона против такой батареи. 19... ♗d5 20. ♗a5 ♗a8 21. ♗f1 f5 22. h4 ♗g4 23. ♗c3 f4 24. gf ♗g8 25. ♗e1 ♗f4 26. ♗a3+ ♗f6 27. ♗f1 ♗d8 28. ♗c3+ e5 29. ♗g1 ♗h5 30. ♗a5 ♗d7 31. ♗a6+ ♗e7 32. ♗a3+ ♗f6 33. ♗c2 ♗f5 34. ♗b2 ♗e6?! 35. ♗c3?! Белые упускают возможность воспользоваться неточностью соперника: после 35. e3! ♗e4 36. ♗g5 ♗g5 37. hg+ поле e6 занято слоном, и черный король всерьез рискует получить мат. 35...h6 36. ♗b5 ♗e4 37. ♗d1 ♗f5 38. ♗b2 ♗d3 39. ed ♗f3+ 40. ♗c1 ♗d3 41. ♗b4 ♗f2 42. ♗h1 h5 43. ♗a4 a5 44. ♗d1

♗b6 45. ♗b2 ♗c5 46. ♗a3 ♗f5 47. ♗c3 ♗b5 48. ♗b2 ♗c6 49. ♗c3 f6 50. ♗a5 ♗b7 51. ♗d3 cd 52. ♗c3 ♗a6 53. ♗b3 ♗e4 54. a4 ♗f3.



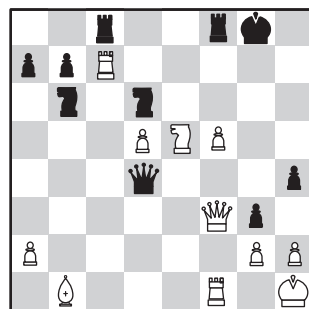
55. ♗e1?? Белые могли форсировать вечный шах после 55. ♗d5+ ♗f2 56. ♗c5+ ♗e2 57. ♗e1+ ♗e1 58. ♗g1+ ♗e2 59. ♗g2+ ♗e1, но по турнирному раскладу их устраивала только победа. 55... ♗f2! Смело и сильно! Благодаря связанным проходным пешкам, черные побеждают. 56. ♗e4 f5 57. ♗c4 e4 58. ♗c3 ♗c2 59. a5 ♗h6 60. ♗b1 ♗d2 61. ♗b2 ♗e6 62. ♗c5 f4 63. ♗b5 f3 64. ♗e5 ♗g6 65. a6 f2 66. ♗f5 ♗e3 67. ♗b2+ d2 68. a7 ♗f5 69. a8 ♗ f1 ♗+ 70. ♗a2 ♗e6+ 71. ♗a3 ♗c5+ 72. ♗a4 ♗c4+ 73. ♗a5 ♗a1+ 74. ♗a1 ♗b4+ 75. ♗a6 ♗b6 мат.

Следующая партия может поспорить за звание лучшей в 2022 году, но она сыграна в быстрые шахматы в интернете, что несколько уменьшает ее значимость

**Я.-К.Дуда –А.Гири  
Meltwater Champions Chess  
Tour Finals, 2022**

1. d4 ♗f6 2. c4 e6 3. ♘f3 d5 4. ♗c3 ♗b4 5. cd ed 6. ♗ g5 ♗bd7 7. ♗c1 h6 8. ♗h4 g5 9. ♗g3 ♗e4 10. ♗b3 ♗c3+ 11. bc ♗b6 12. e3 h5 13. c4!? Белые могли сохранить слона после 13. h4 ♗g3 14. fg ♗d6 15. ♗f2, но вариант в партии гораздо острее. 13...h4 14. ♗e5 f6 15. cd fe 16. ♗b5+ ♗f8 17. ♗e5 ♗g7 18. ♗d3 ♗d6 19. 0-0 g4 20. f4 ♗f8 21. e4 g3 22. f5 ♗g5 23. ♗c7+ ♗g8 24. ♗b1 ♗d2 25. ♗f3! ♗f5 (25... ♗d4+ 26. ♗h1 ♗e5 не работает из-за 27. ♗g4+ ♗h8 28. ♗h5+ ♗g8

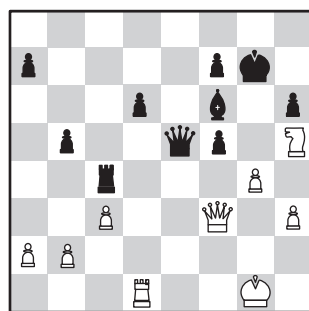
29. ♗h7, мат) 26. ef ♗d4+ 27. ♗h1 ♗ ac8.



28. ♗g7+ (форсированный мат!) ♗g7 29. f6+ ♗h6 30. ♗g4+ ♗g5 31. ♗f5+ ♗f5 32. ♗f5+ ♗g6. Наиболее красивая концовка получалась в случае 32... ♗g4 33. h3!, мат. 33. ♗e5+, и черные сдались ввиду неизбежного мата после 33... ♗f7 34. ♗e7+ ♗g8 35. ♗h6+ ♗h8 36. ♗h7x.

Тем временем, шахматные баталии продолжают уже в новом году, и титул чемпиона традиционного турнира в Вейк-ан-Зее второй год подряд остается у хозяев соревнований, чему поспособствовал невероятный зевок Р.Раппорта в последнем туре, позволивший Анишу Гири на полочка обойти преследователей.

**А.Гири – Р.Раппорт  
Вейк-ан-Зее, 2023**

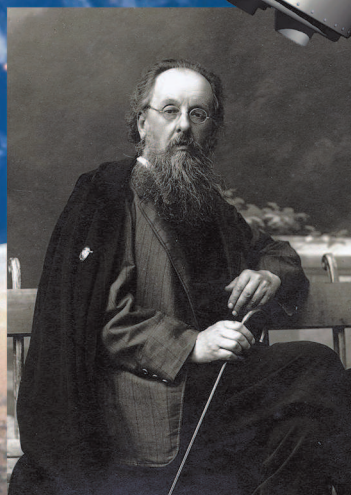


34... ♗g6?? (после 34... ♗g8 у черных все в порядке, и партия должна закончиться закономерной ничьей) 35. ♗d6! (ладью нельзя брать из-за мата на f5) ♗g5 36. ♗d5 ♗e1+ 37. ♗g2 ♗e7 38. ♗f5+ ♗h4 39. ♗g3+, черные сдались.

*А.Пусанов*

# Уроки с физикой

## Трос в ... КОСМОСЕ



Возможно ли реализовать идею К.Э. Циолковского о создании космического лифта?



ISSN 0130-2221 23002  
9 770130 222238

(ПОДРОБНЕЕ — НА С. 12 ВНУТРИ ЖУРНАЛА)